微分積分学 II　2007 年 7 月 23 日施行の期末試験の解答例と解説

渕野 昌

fuchino@isc.chubu.ac.jp

July 24, 2007

last modified on: August 5, 2007

渕野担当の微分積分学 II で 2007 年 7 月 23 日に行なった期末試験のための演習の解答例とそこでの考え方を示します.

解答例は計算ミスなどがないよう注意して書いたつもりですが，もし間違えを発見した場合には，上記のアドレス宛にメールで書いて知らせてください.

このテキストは

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki-II-SS07-kimatsu.pdf

としてダウンロードできます.

科目名	微分積分学II	担当者名	渕野　昌	所要時間	80 分	2007 年 7 月 23 日 (月) 11:10〜12:30 施行
持込	可					
添付する解答用紙	1 枚配付（問題用紙の回収 要・否）		計算用紙 0 枚配付			

注意: 解答は，ごく簡単な計算で答の得られるいくつかの問題以外では，計算結果だけでなく，途中経過とそこで用いたアイデアの説明をできるだけ詳しく書いてください．何段階かの考察が必要だったり，講義で出てきた定理のいくつかを用いているときには，そのことの説明をせずに正しい計算結果だけを書いていても解答とできないこともありえます．

1. $f(x,y) = -5x^3y + xy + 2y^2$ とするとき，次の問に答えてください．

(a) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めてください．

(b) $f(1,1)$ の値を求めてください．

(c) $z = f(x,y)$ のグラフの，点 $(1,1,f(1,1))$ での接平面の方程式を求めてください．

(d) xy-平面上の点 $(1,2)$ は 方程式 $f(x,y) = 0$ を満たすことを確かめてください．

(e) $f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の図形の，点 $(1,2)$ での接線の方程式を陰関数の定理を用いて求めてください．(ヒント: $f(x,y) = y(-5x^3 + x + 2y)$ と因数分解できることに注意する)

(f) $f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の図形を図示してください．(ヒント: (e) のヒントを用いる)

(g) $f(x,y) = 0$ の点 $(1,1)$ の近くでの陰関数が何になるか答えてください．

2. 次の関数 $f(x,y)$ が極値をとる点を持つなら，そのような点のすべてと，そこでの極値の値を求め，それが極小値か極大値のどちらかを答えてください．もし極値をとる点を持たないなら，なぜそう結論できるかを説明してください．

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + y^2$

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

3. $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ とするとき，$x^2 + y^2 = 1$ 条件の下で $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を求めてください．$f(x,y)$ は連続で，$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は有界閉曲線なので，$f(x,y)$ は $x^2 + y^2 = 1$ 条件の下で最大値と最小値をとることが証明できます．それらの値を求めてください．

4. xy-平面上の領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 2y \leq 2\}$ について次の問に答えてください．

(a) D を図示してください．

(b) 曲面 $z = x + y^2$ と xy-平面ではさまれる領域のうち，D の上にある部分の体積を求めてください．

* 試験実施後に解答例と解説を

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki-II-SS07-kimatsu.pdf

として掲示します．

問題の解答例と解説

1. $f(x,y) = -5x^3y + xy + 2y^2$ **とするとき，次の問に答えてください．**

(a) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ **を求めてください．**

$f_x(x,y) = -15x^2y + y$, $f_y(x,y) = -5x^3 + x + 4y$.

(b) $f(1,1)$ **の値を求めてください．**

$f(x,y)$ の式に $x = 1$, $y = 1$ を代入して，$f(1,1) = -5 \times (1)^2 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1^2 = -2$.

(c) $z = f(x,y)$ **のグラフの，点** $(1,1,f(1,1))$ **での接平面の方程式を求めてください．**

(a) での結果に $x = 1$, $y = 1$ を代入すると，$f_x(1,1) = -15 \times 1^2 \times 1 + 1 = -14$, $f_y(1,1) = -5 \times 1^3 + 1 + 4 \times 1 = 0$ となる．また，(b) により $f(1,1) = -2$ だから，接平面の方程式は，$z - (-2) = -14(x-1) + 0(y-1)$. この式を整理して，$z = -14x + 12$ である．

(d) xy**-平面上の点** $(1,2)$ **は 方程式** $f(x,y) = 0$ **を満たすことを確かめてください．**

$f(x,y)$ の式に $x = 1$, $y = 2$ を代入すると，$f(1,2) = -5 \times 1^3 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 2^2 = 0$ となるから，$(1,2)$ は確かに $f(x,y) = 0$ を満たす点となっている．

(e) $f(x,y) = 0$ **によって定まる** xy**-平面上の図形の，点** $(1,2)$ **での接線の方程式を陰関数の定理を用いて求めてください．**

$f_y(1,2) = -5 \times 1^3 + 1 + 4 \times 2 = 4 \neq 0$ だから，$(1,2)$ の近くで，陰関数の定理を， $f(x,y) = 0$ に適用することができる．$f(x,y) = 0$ を満たす点の集合が $(1,2)$ の近くで，関数 $\varphi(x)$ のグラフと一致する（つまり $\varphi(x)$ は $f(x,y) = 0$ の $(1,2)$ の近くでの陰関数）とすると，陰関数の定理から，$\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ である．$f_x(1,2) = -15 \times 1^2 \times 2 + 2 = -28$ $f_y(1,2) = -5 + 1 + 8 = 4$ だから，$\varphi'(x)$ の $x = 1$ での値は，$-\dfrac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)} = -\dfrac{-28}{4} = 7$ したがって，$(1,2)$ での $f(x,y) = 0$ のグラフへの接線（$=$ $(1,2)$ での $y = \varphi(x)$ の接線）の方程式は，$y - 2 = 7(x-1)$, あるいはこの式をさらに整理して $y = 7x - 5$ である．

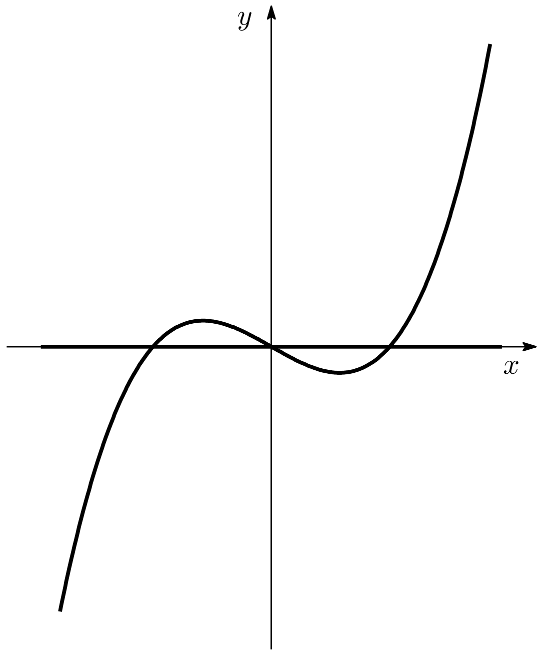
（別解） $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ または $y = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x$ だから，点 $(1,2)$ の近傍では， $\varphi(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x$ が $f(x,y) = 0$ の陰関数となる．したがって，$\varphi'(x) = \dfrac{15}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ で，$\varphi'(1) = 7$ である．曲線 $f(x,y) = 0$ の $(1,2)$ での接線は $y = \varphi(x)$ の $(1,2)$ での接線だから，これは $y - 2 = 7(x-1)$ であらわされる直線になることがわかる．

(f) $f(x,y) = 0$ **によって定まる** xy**-平面上の図形を図示してください．**

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow -5x^3y + xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow y(-5x^3 + x + 2y) = 0 \Leftrightarrow$
$y = 0$ または $-5x^3 + x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ または，$y = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x$
したがって，$f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の図形は，$y = 0$ のグラフ（つまり x-軸）と三次曲線 $y = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x$ を合わせたものになる．
$g(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x$ とすると，$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ or $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ で，$g'(x) = \dfrac{15}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ だから，$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ である．この関数の増減表は,

x	$x < -\frac{1}{\sqrt{15}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{15}}$	$-\frac{1}{\sqrt{15}} < x < \frac{1}{\sqrt{15}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{1}{\sqrt{15}} < x$
g’(x)	$+$	0	$-$	0	$+$
g(x)	$\nearrow$	$\frac{1}{3\sqrt{15}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{3\sqrt{15}}$	$\nearrow$

となる．以上を用いて



(g) $f(x,y)=0$ **の点** $(1,1)$ **の近くでの陰関数が何になるか答えてください．**

$(1,2)$ は $y=0$ を満たさず，$-5x^3+x+2y=0$ を満たす．(f) で見たように $f(x,y)=0$ で表される図形は，この 2 つの式のどちらかを満たす点を集めたものになっているので，$(1,2)$ の近くでの $f(x,y)=0$ の陰関数は，$-5x^3+x+2y=0$ がそのグラフになるような関数であることがわかる．この式を y について解くと $y=\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x$ となるから，$\varphi(x)=\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x$ が $f(x,y)=0$ の $(1,2)$ の近くでの陰関数となる．

2. 次の関数 $f(x,y)$ **が極値をとる点を持つなら，そのような点のすべてと，そこでの極値の値を求め，それが極小値か極大値のどちらかを答えてください．もし極値をとる点を持たないなら，なぜそう結論できるかを説明してください．**

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+y^2$

$f_x(x,y)=x$, $f_y(x,y)=2y$ だから，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

を満たす点は $(x,y)=(0,0)$ のみである．$f(0,0)=0$ で，$f(x,y)$ の定義から $(x,y)\neq(0,0)$ なら $f(x,y)>0$ となるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で最小値 0 をとることがわかる．

$f(x,y)$ が $(0,0)$ で極小値をとることは，教科書の定理 7.3 を用いて確かめることもできる: $f_{xy}(x,y)=0$, $f_{xx}(x,y)=1$, $f_{yy}(x,y)=2$ だから，

$$(f_{xy}(0,0))^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=0^2-1\times 2=-2<0$$

となる．したがって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとることがわかる．とくに，$f_{xx}(0,0)=1>0$ だから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ をとることがわかる．さらに $f(x,y)$ の定義から $(x,y)\neq(0,0)$ なら $f(x,y)>0$ だから，この値は最小値にもなっていることが結論できる．

注意 $f(x,y)$ はただ 1 つの極値を 1 つの点 $(0,0)$ でとり，この点で $f(x,y)$ は極小となるが，一般には，この事実

だけから，$f(x,y)$ が $(0,0)$ で最小値をとることを結論することはできない，たとえば,

$$f(x,y) = -(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+1$$

とすると $f(x,y)$ は $(0,0)$ のみで極値をとり，ここで $f(x,y)$ は極小となるが，$\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ なら $f(x,y) \to -\infty$ だから，$f(x,y)$ の値は $(0,0)$ で最小値となっていない.

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

$f_x(x,y) = 2x - 2y$, $f_y(x,y) = -2 - 6y$ だから,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2y = 0 & \cdots (1) \\ -2x - 6y = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

$(1) + (2)$ から $8y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ となり，これを (1) に代入すると $x = 0$ となる．したがって，$(0,0)$ が $f(x,y)$ が極値をとる可能性のあるただ 1 つの点であることがわかる.

ここで，$f_{xy}(x,y) = -2$, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = -6$ だから,

$$(f_{xy}(0,0))^2 - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) = (-2)^2 - 2 \times (-6) > 0$$

となる．したがって，定理 7.3 から，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらない． $(0,0)$ は極値をとる可能性のあるただ 1 つの点だったので，$f(x,y)$ は極値をとる点を持たないことがわかった.

3. $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ **とするとき，**$x^2 + y^2 = 1$ **条件の下で** $f(x,y)$ **が極値をとる点の候補を求めてください．**$f(x,y)$ **は連続で，** $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ **は有界閉曲線なので，**$f(x,y)$ **は** $x^2 + y^2 = 1$ **条件の下で最大値と最小値をとることが証明できます．それらの値を求めてください．**

ラグランジュの未定常数法（未定乗数法: 教科書 p167 定理 7.5）により，方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-1)) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-1)) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots (1) \\ 2x + 4y + 2\lambda x = 0 & \cdots (2) \\ 4x + 8y + 2\lambda y = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

を新しい変数（未定常数） λ とともに満たす (x,y) の全体が $x^2 + y^2 = 1$ の条件下で $f(x,y)$ が極値をとる（可能性のある）xy-平面上の点となる.

(2) $\times 2$ $-$ (3) により: $4\lambda x - 2\lambda y = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 0$ または $2x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 0$ または $y = 2x$ である．$\lambda = 0$ なら，これを (2) に代入すると $y = -2x$ となるから，$y = 2x$ または $y = -2x$ が成り立つことがわかる．$y = 2x$ または $y = -2x$ を (1) に代入すると，いずれの場合にも $5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ となるから，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ の 4 つの点がある λ とともに (1), (2), (3) を満たすような (x,y) の全体となる．問題の文章にもあるように，$f(x,y)$ は，円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上で少なくとも一組の最大値と最小値をとることが示せるので[1)]，$f(x,y)$ はこれらの 4 つの点のどれかで最大値と最小値をとっている．このこ

[1)] 証明は，たとえば，`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/notes/math-notes-elementary.pdf` の “コンパクト性の微積での扱い” という題の節を参照．なお，この主張は，より一般的には

a) $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトである;

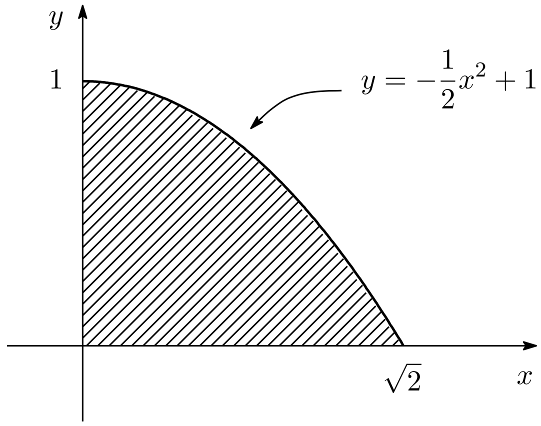
b) コンパクト集合上で連続関数は最大値と最小値をとる

という 2 つの事実から導くことができる.

とと，$f(x,y)$ のグラフの原点を中心とした対称性（すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し $f(x,y)=f(-x,-y)$ が成り立つ）と $f(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})=f(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})=5$, $f(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})=f(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})=\frac{9}{5}$ から，$f(x,y)$ は $x^2+y^2=1$ の条件下で，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ で最大値 5 をとり，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ で最小値 $\dfrac{9}{5}$ をとることがわかる．

4. xy**-平面上の領域** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x^2+2y\leq 2\}$ **について次の問に答えてください．**

(a) D **を図示してください．**



(b) 曲面 $z=x+y^2$ **と** xy**-平面ではさまれる領域のうち，**D **の上にある部分の体積を求めてください．**

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+y^2)\,dxdy &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{-\frac{1}{2}x^2+1}(x+y^2)\,dydx = \int_0^{\sqrt{2}}\left[xy+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=-\frac{1}{2}x^2+1}dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(x(-\frac{1}{2}x^2+1)+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}x^2+1)^3\right)dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}x^3+x-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2)^3+\frac{1}{3}\cdot 3(\frac{1}{2}x^2)^2\cdot 1^1-\frac{1}{3}\cdot 3(\frac{1}{2}x^2)^1\cdot 1^2+1^3\right)dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{24}x^6+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+1\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{24\times 7}x^7+\frac{1}{4\times 5}x^5-\frac{1}{2\times 4}x^4-\frac{1}{2\times 3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{24\times 7}\cdot(\sqrt{2})^7+\frac{1}{4\times 5}\cdot(\sqrt{2})^5-\frac{1}{2\times 4}\cdot(\sqrt{2})^4-\frac{1}{2\times 3}\cdot(\sqrt{2})^3+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2+\sqrt{2} \\
&= -\frac{1}{21}\sqrt{2}+\frac{1}{5}\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}+1+\sqrt{2} \\
&= \left(-\frac{1}{21}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1\right)\sqrt{2}-\frac{1}{2}+1 = \frac{32}{35}\sqrt{2}+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$