微分積分学 II レポート No.1　　　　　　**担当： 渕野 昌** (2007 年 05 月 27 日 16:30)

解答例と解説

以下は，2007 年春学期開講の微分積分学 II で，5 月 23 日に提出してもらったレポートの解答例とその解説です．このファイルは，

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki-II-report-07-05-14.pdf

としてダウンロードできます．このレポートの模範解答以外にも，講義に関連した教材や，過去の問題や解答例などが：

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/index.html

にリンクされています．このページのリンクは逐次更新しますのでチェックしてください．

$\boxed{\mathbf{1}}$　$f(x, y) = 3x + 2y + 1$ とするとき，$z = f(x, y)$ のグラフは何か? 特に，このグラフを xy-平面， xz-平面， yz-平面で切断したときの，それぞれの切り口は何になるか? このグラフを図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$　次のグラフが何になるかを答えよ: $\boxed{\mathbf{1}}$ でと同様に，適当な平面で切断したときのグラフの切り口を調べてそれをもとに考えること．また，グラフを図示せよ．

(a) $z = -x^2 - y^2$　　(b) $z = x^2 - y^2$　　(c) $z = x + y^2$　　(d) $z = |x| + |y|$

$\boxed{\mathbf{3}}$　$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 3$ とする．

(a) $z = f(x, y)$ のグラフと，教科書の問題 5.4 (3) のグラフとの関係は何か?

(b) $z = f(x, y)$ のグラフの xy-平面による切り口は何か?

$\boxed{\mathbf{4}}$　$f(x, y) = x^3 e^y$ とするとき，$z = f(x, y)$ のグラフの $(2, 1, 8e)$ での接平面をあらわす式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$　2 変数の関数 $g(x, y)$ が，ある 1 変数の関数 $f(x)$ により $g(x, y) = f(\frac{x}{y})$ とあらわされているとする．

(a) $f(x)$ の定義域が $(-\infty, +\infty)$ のとき，$g(x, y)$ の定義域は何か?

(b) $g(x, y)$ は，微分方程式 $x\frac{\partial}{\partial x}g(x, y) + y\frac{\partial}{\partial y}g(x, y) = 0$ を満たすことを示せ．

(c) （チャレンジ問題）逆に C^1-級の関数 $g(x, y)$ が (b) での微分方程式を満たすなら，常に $g(x, y) = f(\frac{x}{y})$ となるような 1 変数関数 $f(x)$ が存在することを示せ．

（ヒント: $g(x, y) = h(\frac{x}{y}, y)$ となるような $h(u, v)$ をとると $\frac{\partial}{\partial v}h(u, v)$ がすべての (u, v) に対して 0 となることを示し，そのことから $g(x, y) = f(\frac{x}{y})$ となるような 1 変数関数 $f(x)$ が存在することを導く.）

$\boxed{1}$ **$f(x,y)=3x+2y+1$ とするとき，$z=f(x,y)$ のグラフは何か? 特に，このグラフを xy-平面，xz-平面，yz-平面で切断したときの，それぞれの切り口は何になるか? このグラフを図示せよ．**

$f(x,y)$ は変数 x, y に関する一次の多項式なので，$z=f(x,y)$ のグラフ，つまり，集合 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, z=3x+2y+1\}$ は xyz-空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面になる[1]．

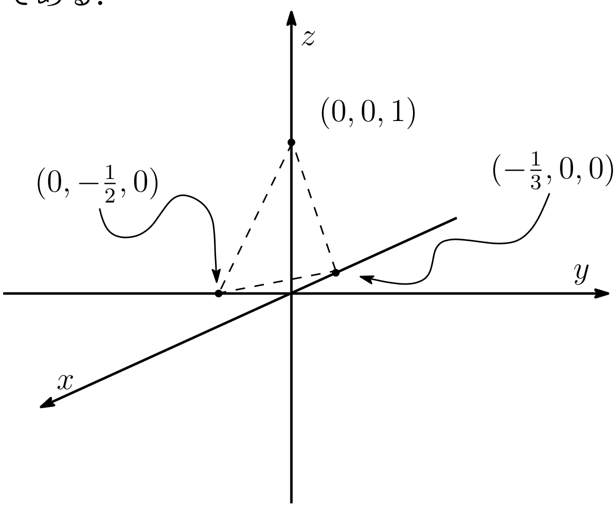
xyz-空間での xy-平面 yz-平面 xz-平面は，それぞれ，

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, z=0\},\quad \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x=0\},\quad \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, y=0\}$$

とあらわせる．したがって，$z=f(x,y)$ のグラフをこれらの平面で切ったときの切り口[2]は，それぞれ，連立方程式

$$\begin{cases} z=3x+2y+1 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=3x+2y+1 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=3x+2y+1 \\ y=0 \end{cases}$$

の解の全体からなる曲線（直線）である．これらは，それぞれ，xy-平面上の $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ のグラフ，yz-平面上の $z=2y+1$ のグラフ，および，xz-平面上の $z=3x+1$ のグラフになる．これらの直線の z-軸，y-軸，z-軸との切片は（xyz-空間内で考えると）それぞれ $(-\frac{1}{3},0,0)$, $(0,-\frac{1}{2},0)$, $(0,0,1)$ である．この 3 点を含む xyz-空間内の平面が $z=f(x,y)$ のグラフである．



[1] $\mathbb{R}^3$ で実数の 3 つ組で表される空間座標の全体からなる集合をあらわし，自然な対応でこれを三次元空間と同一視するのだった．また $u\in X$ で集合 X に u が要素として含まれることをあらわすのだった．

[2] これは，たとえば $z=f(x,y)$ のグラフの yz-平面での切り口とは $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, z=f(x,y,z)\}$ と，$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x=0\}$ の（集合としての）共通部分ということである．

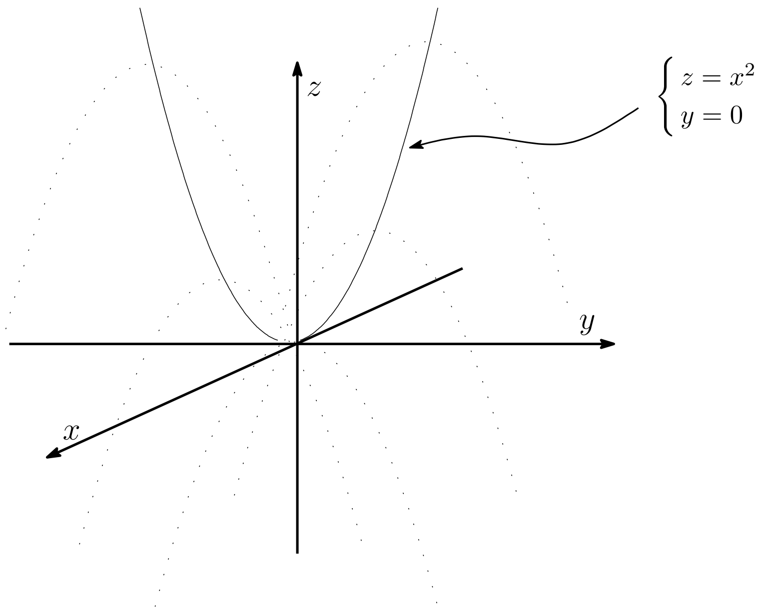
$\boxed{2}$　次のグラフが何になるかを答えよ: $\boxed{1}$ でと同様に，適当な平面で切断したときのグラフの切り口を調べてそれをもとに考えること．また，グラフを図示せよ．

(a) $z = -x^2 - y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ とすると，上の式は $z = -f(x,y)$ となる．一方，この $f(x,y)$ に対して $z = f(x,y)$ を考えると，これは，教科書 p.112 の問題 5.4(1) の $z = x^2 + y^2$ と一致する．このことから，$z = -x^2 - y^2$ のグラフは $z = x^2 + y^2$ のグラフの xy-平面に関する鏡像（鏡に映した像）になっている．問題 5.4(1) の解答と同様の表現で言えば，このグラフは xz-平面上の $z = -x^2$ のグラフを z 軸を中心にして回転させて得られるものになっている（図は省略する）．

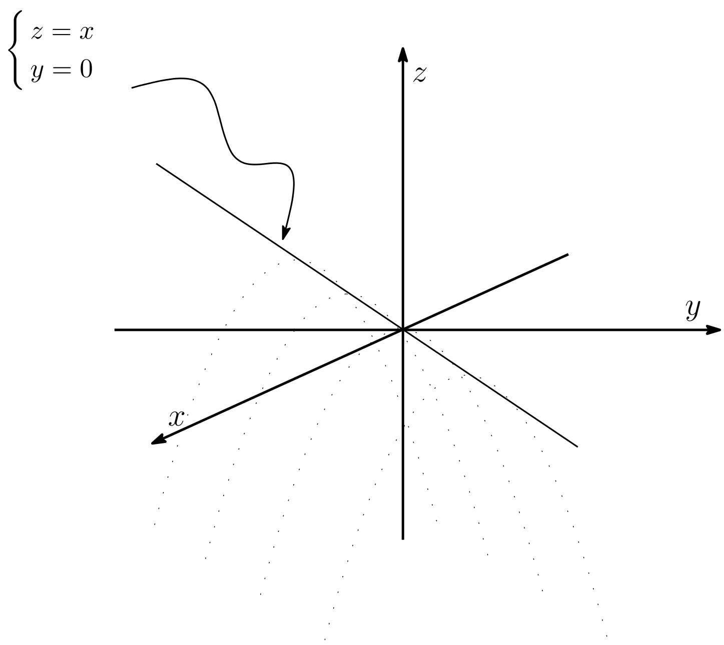
(b) $z = x^2 - y^2$

上の式に $y = 0$ を代入すると，このグラフの xz-平面での切り口は $z = x^2$ であらわされる二次曲線になることがわかる．また，このグラフを yz-平面を x-軸方向に a だけ平行移動させた平面（$x = a$ であらわさせる平面）で切ったときの切り口は，$z = y^2 + a^2$ であらわさせる，この平面（$x = a$ であらわされる平面）上の二次曲線である．これを用いてグラフの素描は以下のようになる:



(c) $z = x + y^2$

(b) と同様に，このグラフの xz-平面での切り口は $z = x$ であらわされる直線となる．一方，$x = a$ であらわされる平面で切ったときの切り口は，$z = y^2 + a$ であらわされるこの平面上の二次曲線である．このことから，このグラフは次のように描けることがわかる:

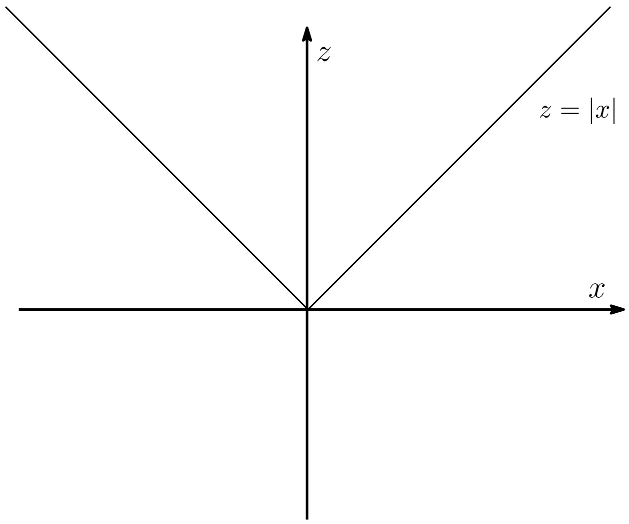


(d) $z = |x| + |y|$

このグラフの xz-平面での切り口は，$z = |x|$ であらわさせる．絶対値の定義から，この等式は

$$z = \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ のとき} \\ -x & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と書きなおせることに注意する．このことから，$z = |x|$ の xz-平面上のグラフは，



となる．yz-平面での切り口についても同様である．$|x| \geq 0, |y| \geq 0$ がすべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して成り立つから，$f(x, y) = |x| + |y|$ の値域は $[0, \infty)$ となることがわかる．$a \geq 0$ に対し，xy-平面を a だけ z 方向に平行移動した，$z = a$ であらわされる平面で，このグラフを切ったときの切り口は，

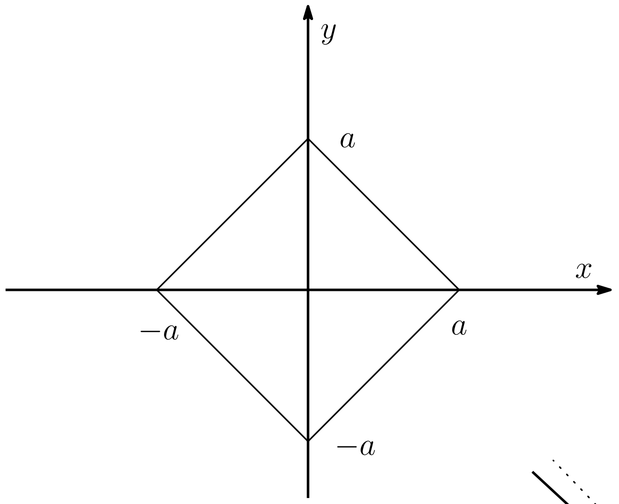
$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ z = a \end{cases}$$

であらわされる図形となる．上の１番目の式について場合分けをして考えてみる:

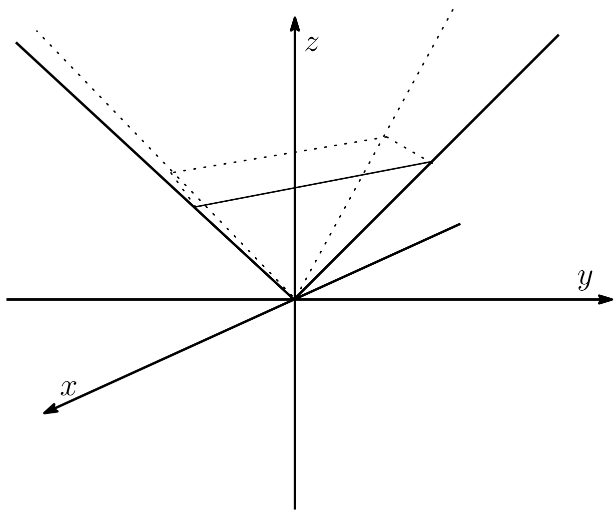
$x > 0, y > 0$ のときには，$|x| + |y| = a \Leftrightarrow x + y = a \Leftrightarrow y = -x + a$

$x < 0,\, y > 0$ のときには，$|x| + |y| = a \Leftrightarrow -x + y = a \Leftrightarrow y = x + a$
$x < 0,\, y < 0$ のときには，$|x| + |y| = a \Leftrightarrow -x - y = a \Leftrightarrow y = -x - a$
$x > 0,\, y < 0$ のときには，$|x| + |y| = a \Leftrightarrow x - y = a \Leftrightarrow y = x - a$

となるから，この図形は，平面 $z = a$ を上から見たとき



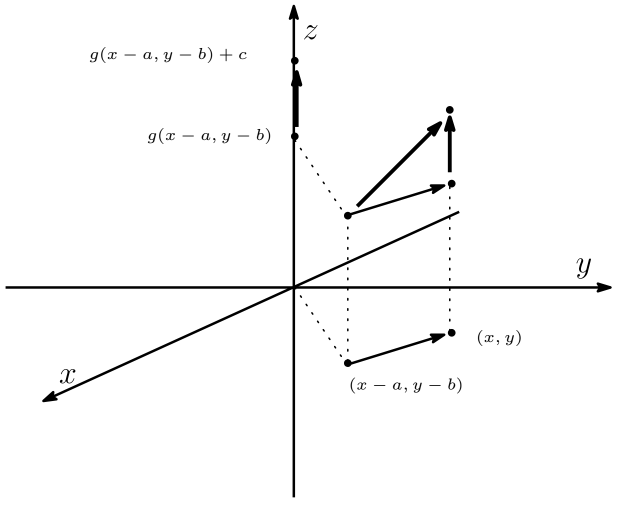
となる．以上から，



$\boxed{3}$ $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 3$ **とする．**

(a) $z = f(x, y)$ **のグラフと，教科書の問題 5.4 (3) のグラフとの関係は何か?**

一般に，$z = g(x-a, y-b) + c$ のグラフは $z = g(x, y)$ のグラフを x-軸方向に a, y-軸方向に b, z-軸方向に c だけ平行移動したものになる（下図参照）.



したがって，ここの問題では，$z=f(x,y)$ のグラフ，つまり $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+3$ のグラフは，教科書の問題 5.4 (3) での $z=\sqrt{x^2+y^2}$ のグラフを x-軸方向，y-軸方向，z-軸方向に，それぞれ 1, 2, 3 だけ平行移動して得られるグラフになっている．

(b) $z=f(x,y)$ のグラフの xy-平面による切り口は何か?

$f(x,y)$ の値域は $[3,\infty)$ だから，連立方程式

$$\begin{cases} z=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+3 \\ z=0 \end{cases}$$

は解を持たない．つまり，$z=f(x,y)$ の xy-平面による切り口は空（くう）である．

$\boxed{4}$　$f(x,y)=x^3e^y$ とするとき，$z=f(x,y)$ のグラフの $(2,1,8e)$ での接平面をあらわす式を求めよ．

講義でも偏微分のモティヴェーション（動機付け）として説明したように，関数 $f(x,y)$ のグラフ $z=f(x,y)$ の，点 $(a,b,f(a,b))$ での接平面は，

(*)　$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$

であらわされる．$\boxed{3}$ の解説から，(*) の表す平面は，$z=f_x(a,b)x+f_y(a,b)y$ であらわされる平面を x-軸方向，y-軸方向，z-軸方向にそれぞれ a, b, $f(a,b)$ だけ平行移動して得られるものとなっている．特に，後者は $(0,0,0)$ を通る平面なので，前者は $(a,b,f(a,b))$ を通る平面となることに注意する．

ただし，この議論ができるのは $f(x,y)$ が 1 階偏微分可能でしかも $(a,b,f(a,b))$ で $z=f(x,y)$ のグラフの接平面がとれる場合に限る．このことを保証するには，一般には $f(x,y)$ が 1 階偏微分可能であるだけでは十分でないが，たとえば 1 階の偏微分が両方とも (a,b) の近く連続である（つまり (a,b) の近傍で C^1-級である）ことから保証される．

ここでの $f(x,y)$ は何回でも偏微分可能（C^∞-級）なので特に C^1-級だから，$z=(x,y)$ のグラフはどこでも接平面を持ち，(*) で接平面を求めることができる．そこで，(*) に $f(x,y)=x^3e^y$, $a=2$, $b=1$ $(f(2,1)=8e)$ を代入すると，$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=3x^2e^y$, $f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=x^3e^y$ で，$f_x(2,1)=3\cdot 2^2e^1=12e$, $f_y(2,1)=2^3e^1=8e$ だから，$z=12e(x-2)+8e(y-1)+8e$ が，$z=-f(x,y)$ の $(2,1,8e)$ での接平面をあらわす一次式である．

$\boxed{5}$　2 変数の関数 $g(x,y)$ が，ある 1 変数の関数 $f(x)$ により $g(x,y)=f(\frac{x}{y})$ とあらわされているとする．

(a) $f(x)$ の定義域が $(-\infty,+\infty)$ のとき，$g(x,y)$ の定義域は何か?

関数の定義域は，他に指定がないときには，定義式が意味を持つような変数すべて，ということにしていたので，この場合には（$f(x)$ はすべての値に対して定義されているので）$\frac{x}{y}$ が計算できるすべての x と y の組ということになる．したがって，この関数の定義域は，y が 0 と異なる x と y の組全体，つまり

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y\neq 0\}$$

となる．これは xy-平面で考えると，全平面から x-軸を除いた残りである．

(b) $g(x,y)$ は，微分方程式 $x\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) + y\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = 0$ を満たすことを示せ．

合成関数の微分法（教科書の定理 5.6 での $f(x,y)$ の変数 y がダミー変数[3]の場合を考える）により，

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(\tfrac{x}{y}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y}\right)f'(\tfrac{x}{y}) = \frac{1}{y}f'(\tfrac{x}{y})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(\tfrac{x}{y}) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y}\right)f'(\tfrac{x}{y}) = -\frac{x}{y^2}f'(\tfrac{x}{y})$$

となるから，

$$x\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) + y\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = \frac{x}{y}f'(\tfrac{x}{y}) - \frac{x}{y}f'(\tfrac{x}{y}) = 0$$

が成り立つことがわかる．

(c) （チャレンジ問題）逆に C^1-級の関数 $g(x,y)$ が (b) での微分方程式を満たすなら，常に $g(x,y) = f(\frac{x}{y})$ となるような 1 変数関数 $f(x)$ が存在することを示せ．

$g(x,y)$ が (b) での微分方程式を満たすとする．等式 $g(x,y) = f(\frac{x}{y})$ が意味を持つのは $y \neq 0$ のときだから，$g(x,y)$ の定義域は $(x,0)$ の形の点を含まない凸領域とする．

関数 $h(u,v)$ を $h(u,v) = g(uv,v)$ で定義すると，$g(x,y) = h(\frac{x}{y}, y)$ となる．

したがって，$h(u,v)$ の第 2 変数 v がダミー変数であることが示せれば，$f(u) = h(u,0)$ として，$g(x,y) = h(\frac{x}{y}, y) = h(\frac{x}{y}, 0) = f(\frac{x}{y})$ となるからよい．

教科書の定理 3.3 により，このためには，すべての u, v に対し $\frac{\partial}{\partial v}h(u,v) = 0$ となることが示せればよい．教科書の定理 5.6 により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}h(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}g(uv,v) = \left(\frac{\partial}{\partial v}uv\right)g_x(uv,v) + \left(\frac{\partial}{\partial v}v\right)g_y(uv,v) = ug_x(uv,v) + g_y(uv,v)\\ &= \frac{uv}{v}g_x(uv,v) + g_y(uv,v)\end{aligned}$$

となる．両辺に v をかけて $v\frac{\partial}{\partial v}h(u,v) = uvg_x(uv,v) + vg_y(uv,v)$ となることがわかるが，この等式の右辺は，$g(x,y)$ が (b) での微分方程式を満たすことから，0 である．したがって，$g(x,y)$ の定義域の仮定から $h(u,v)$ の定義域は $v = 0$ となる (u,v) を含まないから，$\frac{\partial}{\partial v}h(u,v) = 0$ となることがわかる．$f(x,y)$ の定義域が凸領域であることから，u を固定したときには，$h(u,v)$ の定義域で v の動ける範囲は区間になる．したがって，定理 3.3 により，$h(u,v)$ の値は u を固定したときには一定値となることがわかる．つまり $h(u,v)$ での変数 v はダミー変数になっている．上で述べたように，これによって証明が完了した．

この問題の (b) と (c) により，次の定理が証明されたことになる:

定理． $g(x,y)$ を $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ と共通部分を持たない凸領域 D 上で定義された C^1-級関数とするとき，以下の (1), (2) は同値である:

(1) ある 1 変数関数 $f(x)$ があって $g(x,y) = f(\frac{x}{y})$ がすべての $(x,y) \in D$ で成り立つ．

(2) $g(x,y)$ は微分方程式 $x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ を満たす．

[3] 関数の変数（のうちの 1 つ）がダミー変数であるとは，実際には関数の値に，その変数の値の変化が全く影響を与えないことをいう．たとえば，$f(x,y) = y^3 + 1$ として $f(x,y)$ を定義するとき，変数 x はダミー変数だし，$f(x,y) = 4$ として $f(x,y)$ を定義するときには変数 x も変数 y もダミー変数である．英語のダミー (dummy) はまがいもの偽装品というような意味．たとえば案山子（かかし）は（本物の人間の偽装品という意味の）ダミーである．