微分積分学 II レポート No.2 **担当： 渕野 昌** (2007 年 07 月 09 日 02:14)

解答例と解説

以下は，2007 年春学期開講の微分積分学 II で，6 月 13 日に提出してもらったレポートの解答例とその解説です．このファイルは,

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki-II-report-07-06-04.pdf`

としてダウンロードできます．このレポートの模範解答以外にも，講義に関連した教材や，過去の問題や解答例などが：

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/index.html`

にリンクされています．このページのリンクは逐次更新しますのでチェックしてください．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ．
ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \le 2x,\, y \ge x^2\}$ とする．

(b) $\displaystyle\iint_D \cos(2x+3y)dxdy$ を計算せよ．
ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi,\, 0 \le y \le \frac{1}{3}\pi\}$ とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (a) どんな 2 変数関数 $f(x,y)$ に対しても二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が $\displaystyle\int_2^3 \int_1^{y+2} f(x,y)\,dxdy$ で計算できるとき，領域 D は何になるか答えよ．また D を図示せよ．

(b) どんな 2 変数関数 $f(x,y)$ に対しても二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ で計算できるとき，領域 D は何になるか答えよ．また D を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\iint_D (x+1)\,dxdy$ がその体積を計算しているような立体を図示せよ．
ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x+y| \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0\}$ とする．
この積分の値を求めよ．

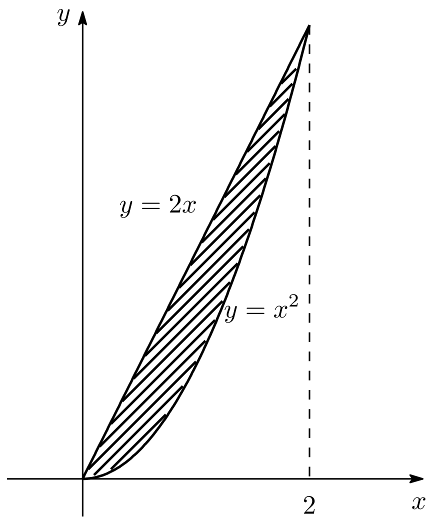
$\boxed{\mathbf{4}}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 2x\}$ として， $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2y^2}dxdy$ の値を極座標変換を用いて計算せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1\right\}$ とする．
(a) D を図示せよ．

(b) 積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ が $x = 2u,\, y = 3v$ という変数変換で $\displaystyle\iint_\Delta f(2u,3v)g(u,v)dudv$ という積分と等しくなったとする．このとき Δ と $g(u,v)$ は何かを答えよ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (a) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ．

ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$ とする．



領域 D は右のように図示される．

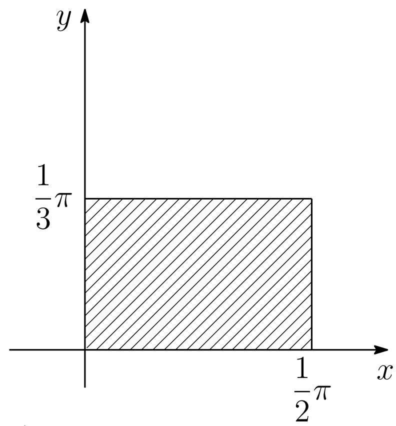
したがって，$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\,dydx$

$\displaystyle = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^5\right) dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{12}x^6\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

(b) $\displaystyle\iint_D \cos(2x+3y)dxdy$ を計算せよ．

ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{3}\pi\}$ とする．



領域 D は右図のようである．したがってこの積分は,

$\displaystyle\iint_D \cos(2x+3y)dxdy = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2x+3y)dx\,dy$

$\displaystyle\left(\text{または } \iint_D \cos(2x+3y)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \cos(2x+3y)dy\,dx\right)$

と計算できる．1 番目の二重積分を実行すると,

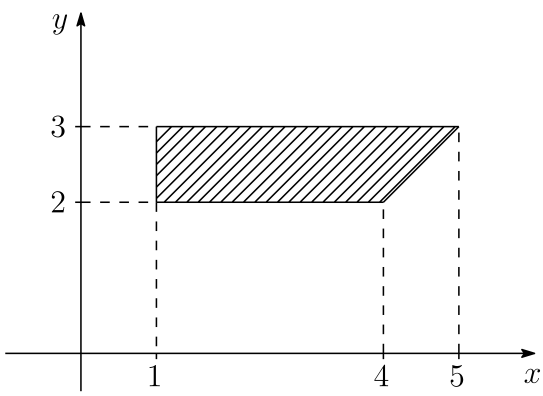
$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2x+3y)dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left[\frac{1}{2}\sin(2x+3y)\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} dy$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \Big(\sin(3y+\pi) - \sin 3y\Big)dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3y+\pi) + \frac{1}{3}\cos 3y\right]_0^{\frac{1}{3}\pi}$

$\displaystyle = \frac{1}{6}\big(-\cos 2\pi + \cos\pi - (-\cos\pi + \cos 0)\big) = \frac{1}{6}\big(-1 + (-1) - (-(-1)+1)\big) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (a) どんな 2 変数関数 $f(x,y)$ に対しても二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が $\displaystyle\int_2^3 \int_1^{y+2} f(x,y)\,dxdy$ で計算できるとき，領域 D は何になるか答えよ．また D を図示せよ．

$\displaystyle\int_2^3 \int_1^{y+2} \cdots\, dxdy$ の積分領域は，$2 \leq y \leq 3$ で，$1 \leq x \leq y+2$ という条件を満たすような xy-平面上の点 (x,y) の全体なので，集合の記号を用いると $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \leq y \leq 3$ かつ $1 \leq x \leq y+2\}$ とあらわすことができる．この領域は下のように図示することができる:

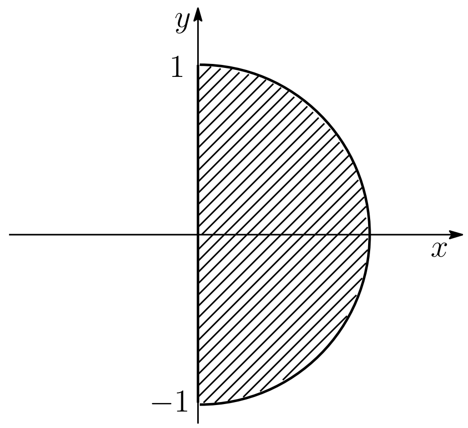


(b) どんな2変数関数 $f(x,y)$ に対しても二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ で計算できるとき，領域 D は何になるか答えよ．また D を図示せよ．

この二重積分の積分領域 D は，y が -1 から 1 までの間を動けて，各 y に対して x のとれる範囲は $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$ である．集合の記法であらわすと，

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 1,\, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$$

となる．y を固定したときの x の値のとれる範囲の一方の限界である $x=0$ は，y を動かすと y 軸となり，もう一方の限界をあらわす $x = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ かつ $x \ge 1$ は原点を中心とした半径 1 の y-軸の右側の半円となる．したがって積分範囲は次のように図示できる．

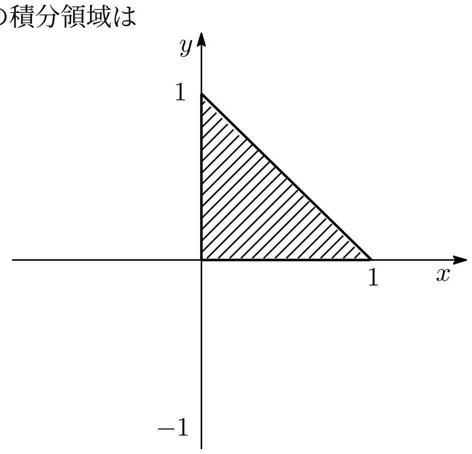


$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\iint_D (x+1)\,dxdy$ がその体積を計算しているような立体を図示せよ．
ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0\}$ とする．
この積分の値を求めよ．

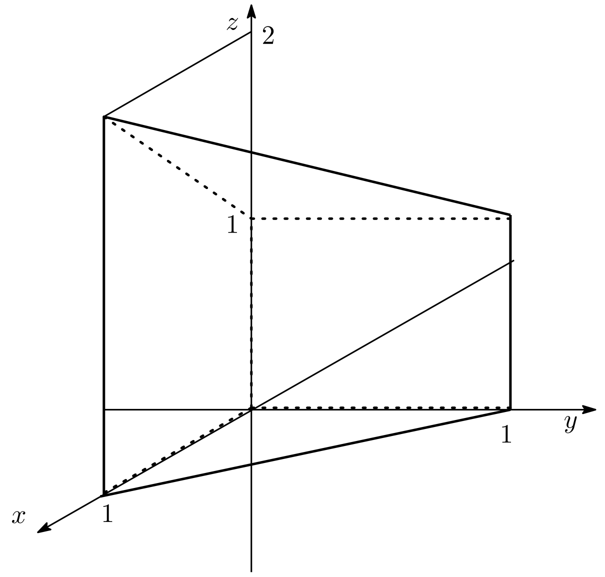
D の条件式 $|x+y| \le 1, x \ge 0, y \ge 0$ は，$x, y \ge 0$ のときには $x+y \ge 0$ となり，$|x+y| = x+y$ となることから，

$$x+y \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0$$

と同値である．したがって，この積分領域は



のようになる．体積がこの積分に対応するような立体は，



のようにあらわせる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ として，$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2y^2}\,dxdy$ の値を極座標変換を用いて計算せよ．