科目名	微分積分学 I	担当者名	渕野　昌	所要時間	75 分	予想問題
持込						
添付する解答用紙	0　枚配付（問題用紙の回収　要・否）		計算用紙　0　枚配付			

以下は 7 月 27 日に予定されている渕野 昌担当の微分積分学 I の試験の “予想問題” です.

I. 以下の空欄 $\boxed{\cdots}$ に，あてはまる数値，数式，計算，または，その他の表現を記入しなさい．数式を書き込むことが適当な空欄で長めのものには，必要に応じて結果だけでなく途中計算も書きこんでください．問題のテキストが他の問題のヒントになっているものもあります．よく考えて解答してください．

1)　関数 $f(x)$, $F(x)$ に対し，$f(x) = \boxed{F'(x)}$ のとき，$F(x)$ は $f(x)$ 原始関数であるという．このとき $\int f(x)dx = F(x)+C$ と書く．ここに C は $\boxed{\text{積分定数}}$ とよばれ，任意の定数をあらわす．$\int f(x)dx$ は $f(x)$ の $\boxed{\text{不定積分}}$ と呼ばれる．微分積分学の基本定理により，$\int_a^b f(x)dx = \boxed{F(b) - F(a)}$ である．

2) $\boxed{\text{置換}}$ 積分法は，次のように述べることができる：
$f(u)$, $g(x)$ を 2 つの関数とするとき，$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du\Big|_{u=g(x)}$ とあらわせる．ただし，この等式の右辺は，$\int f(u)du$ の変数 u に $\boxed{g(x)}$ を代入して得られる関数である．例えば，$\int u^3du = \boxed{\frac{1}{4}u^4 + C}$ だから，$\int \cos x(\sin^3 x)dx = \int (\sin x)'(\sin x)^3dx = \boxed{\frac{1}{4}\sin^4 x + C}$ である．

3) $f(x)$, と $g(x)$ を微分可能な関数とするとき，$(f(x)g(x))' = \boxed{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$ である．この等式の両辺を積分して移項すると，等式 $\int f'(x)g(x)dx = \boxed{f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$ が得られる．

4) 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で，区間 (a, b) で微分可能とする．このとき，$f'(x)$ が区間 (a, b) で常に 0 より大きな値をとるなら，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で $\boxed{\text{増加関数}}$ となる．

5) $f(x)$ を微分可能な関数として，$f'(x)$ は連続となるとき，$f(x)$ が c で $\boxed{\text{極大値}}$ をとるのは，十分に小さな $h > 0$ をとると，区間 $(c-h, c)$ で $f'(x) > 0$ が常に成立ち，区間 $(c, c+h)$ で $f'(x) < 0$ が常に成り立つときである．

6) $f(x)$ を 2 回微分可能で $f''(x)$ は連続となるような関数とするとき，マクローリンの定理から，すべての x に対し，ある $0 < \theta < 1$ で，$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\theta x)x^2$ となるものがとれる．したがって，$f(x)$ の値を $f(0) + f'(0)x$ で近似するとき，そのときの誤差を η とするとき，r が $\left|\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$, $0 < \xi < x$ のどの値より大きいなら $|\eta| < r$ となる．x が 0 に近いときには，$f''(\xi)$, $0 < \xi < x$ の値は $f''(0)$ とそれほど変らないから，このような r の値も小さくとれることがわかる．今 $\sqrt{0.98}$ の近似値を計算するために，$f(x) = \sqrt{1+x}$ とすれば，$\sqrt{0.98} = f\left(\boxed{-0.02}\right)$ となるから，$f'(x) = \boxed{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}$, $f'(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \boxed{-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}}$ により，

$\sqrt{0.98} \approx \boxed{1 + \frac{1}{2} \times (-0.02) = 0.99}$ となる．この値の $\sqrt{0.98}$ の値との誤差を η とすると，$\left|\frac{1}{2} \cdot f''(\xi)\right|$, $0 < \xi < x$ の値の上限は $\frac{1}{8}$ だから，$|\eta| < \boxed{\frac{1}{8} \cdot (-0.02)^2 = 0.00005}$ という評価が得られる．

7) $f(x)$ と $g(x)$ を 2 つの関数とするとき，区間 $[a, b]$ で $f(x) \le g(x)$ がつねに成り立つなら，$\int_a^b f(x)dx \boxed{\le} \int_a^b g(x)dx$ となる．

学部　　　学科	年次	学生証番号	番	氏名	

II. $f(x) = x \log x$ の増減表（$f'(x)$, $f''(x)$ の正負の表示を含むもの）を作成し，この関数の増加，減少，極大，極小，極値，凹凸，変曲点を調べ，グラフの概略図を描け.

III. 区間 $[0, 1]$ 上で，$f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$ とする．このとき
(1) 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれる xy-平面上の領域を図示せよ．
(2) (1) で求めた領域の面積を計算せよ．