

教科書ノート持ち込み可. 以下の ... に, あてはまる数値, 数式, 計算, または, その他の表現を記入しなさい. 空欄に余裕をとってある場所では, 答だけでなく途中計算も書きこむこと.

このテストの回答例を

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-2005s-chukan.pdf>

として掲示します.

1) 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする. 13.5 が $f(x)$ と $f'(x)$ の定義域に含まれるとき $f'(13.5)$ は, $y = f(x)$ のグラフの点 (13.5, f(13.5)) での接線の 傾き を与える. よって, この接線は一次式:

$$y - \text{f(17.5)} = \text{f'(17.5)} (x - \text{17.5})$$

2) 関数 $f(x)$ が 2 つの関数 $g(x), h(x)$ の合成関数として, $f(x) = g(h(x))$ とあらわされているとする. $g(x)$ と $h(x)$ の導関数をそれぞれ $g'(x), h'(x)$ とすると, 合成関数の微分法より, $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の点 x_0 での値は, $f'(x_0) = \text{g'(h(x_0))h'(x_0)}$ となる. したがって, 例えば $h'(x_0) = 3, h(x_0) = 2, g(2) = 4, g(3) = 5, g'(2) = 7, g'(3) = 8$

とすると, $f'(x_0) = \text{3} \times \text{7} = \text{21}$ である.

3) 関数 $f(x)$ が 2 つの関数 $g(x), h(x)$ の積 $f(x) = g(x)h(x)$ となっているとき, $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $g(x)$ と $h(x)$ および, それらの導関数 $g'(x), h'(x)$ を用いて, $f'(x) = \text{g'(x)h(x)} + \text{g(x)h'(x)}$ と書ける.

4) $f(x) = x^x$ は次のようにして求められる: まず, $e^{\log a} = \text{a}$ と $\log a^b = \text{b log a}$ を使うと, $x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$ と変形できる. これに $(e^x)' = \text{e}^x$ と, 2) と 3) で見た合成関数の微分法, 関数の積の微分法を適用すると, $(x^x)' =$

$$\text{(x log x)'e}^{x \log x} = (\log x + 1)e^{x \log x} = (\log x + 1)x^x$$

もう一度適用すると,

$$\text{(2x+1)^{2x+1}}' = \text{(2x + 1)'(log(2x + 1) + 1)(2x + 1)^{2x+1}} = 2(\log(2x + 1) + 1)(2x + 1)^{2x+1}$$

5) $(\sin^{25}(2x + 1))' =$

$$\text{((sin(2x + 1))^{25})' = (sin(2x + 1))' \cdot 25(\sin(2x + 1))^{24} = 50 \cos(2x + 1) \sin^{24}(2x + 1)}$$

6) $y = \log(x+1)$ のグラフは, $y = \log x$ のグラフを x-軸方向に -1 だけ平行移動して得られる. $f(x) = \log(x+1)$ とするとき, 関数 $f(x)$ の定義域は, (-1, \infty) で $f(0) = \text{log 1} = \text{0}$ である. また $y = \log(x+1)$ を x について解くと $x = \text{e}^y - 1$ となるから, $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とすると, $g(x) = \text{e}^x - 1$ である. $g(x)$ の定義域は (-\infty, \infty) で, $g(x)$ のとる値の範囲は, (-1, \infty) である.

7) $y = 4 \sin(2x + \alpha)$ のグラフが何になるかを考える. まず, $y = \sin(2x + \alpha)$ のグラフを考えると, この式は $y = \sin(2(x + \frac{1}{2}\alpha))$ と書きなおせるから, このグラフは, $y = \sin 2x$ のグラフを x-軸方向に -\frac{1}{2}\alpha だけ平行移動して得られるものであることがわかる. 一方 $y = \sin 2x$ のグラフは, $y = \sin x$ のグラフの x-軸方向の縮尺を $\frac{1}{2}$ 倍にすることで得られる. 最後にもともと求めたかった $y = 4 \sin(2x + \alpha)$ のグラフは, $y = \sin(2x + \alpha)$ のグラフを y-軸方向の縮尺を 4 倍にすることで得られる. $f(x) = 4 \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ の値の区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ での最大値は 4 最小値は -2\sqrt{2} となる. またこのグラフの概略図を右の空欄に描け:

8) 6) の関数 $f(x), g(x)$ のグラフを下の空欄に描け: