担当者: 渕野 昌　　**微分積分学 I 第２回中間試験**　　2005 年 6 月 21 日 施行

教科書ノート持ち込み可．このテストの回答例を

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-2005s-chukan2.pdf

として掲示します．
以下の問題の解答では，途中計算を書いたり，どういう性質，定理を使ったかというコメントを加えたりして，どのように考えて答が得られたかが分るように工夫してください．

1)　次の不定積分を計算せよ:

a) $\displaystyle\int x^2-2x+3\ dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$

b) $\displaystyle\int \sin(2\pi x+\frac{4}{3}\pi)dx=-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x+\frac{4}{3}\pi)+C$　　($u=2\pi x+\frac{4}{3}\pi$ と置いて置換積分する)

c)[1] $\displaystyle\int \log(2x+1)dx=\int (x)'\log(x+1)dx=x\log(2x+1)-\int\frac{2x}{2x+1}dx$
$\displaystyle=x\log(2x+1)-\int\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx=x\log(2x+1)-x+\frac{1}{2}\log(2x+1)+C$

2) 次の定積分の計算をせよ:

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{3x+1}dx$　　$u=3x+1$ と置くと，$dx=\frac{1}{3}du$, $x=0$ なら $u=1$, $x=1$ なら $u=4$ だから,
与式 $\displaystyle=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}\left[\log u\right]_1^4=\frac{1}{3}\log 4=\frac{2}{3}\log 2$

3) 積分可能な続関数 $f(x)$ と微分可能な関数 $g(x)$ について，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=1$, $\displaystyle\int_b^c f(x)=2$, $g(1)=b$, $g(2)=c$ であるとする．このとき，つぎの積分の値を求めよ．

a) $\displaystyle\int_c^b f(x)dx\ =-\int_b^c f(x)dx=-2$

b) $\displaystyle\int_a^c f(x)dx\ =-\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=1+2=3$

c) $\displaystyle\int_1^2 2f(g(x))g'(x)dx$　$u=g(x)$ と置いて置換積分の定理を適用すると，与式 $\displaystyle=2\int_b^c f(u)du=2\times 2=4$

4) 積分可能な関数 $f(x)$ と微分可能な関数 $g(x)$ について，$\displaystyle F(x)=\int_0^x f(t)dt$ と置くと，x の関数 $\displaystyle\int_0^{g(x)} f(t)dt$ は $F(g(x))$ とあらわせる．このことと，微分積分学の基本定理と合成関数の微分法の定理を用いて，
$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)}f(t)dt\right)$ が何になるかを答えよ．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_0^{g(x)}f(t)dt\right)&=(F(g(x)))'\\&=F'(g(x))g'(x)\quad(\text{合成関数の微分法の定理による})\\&=f(g(x))g'(x)\quad(\text{微分積分学の基本定理による})\end{aligned}$$

---

[1] ヒント: $\log(2x+1)=(x)'\log(2x+1)$ と考えて部分積分法を用いる．