科目名	微分積分学 I	担当者名	渕野　昌	所要時間	75 分	2005 年 7 月 25 日 (月) 13:30〜14:45 施行
持込	不可					
添付する解答用紙	0　枚配付（問題用紙の回収 要・否）		計算用紙　0　枚配付			

このテストの回答例を試験終了後に http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-2005s-kimatsu.pdf に掲示します.

I. 以下の空欄 $\boxed{\cdots}$ に，あてはまる数値，数式，計算，語句，または，その他の表現を記入しなさい．数式を書き込むことが適当な空欄で長めのものには，結果だけでなく途中計算も書きこんでください．問題のテキストが他の問題のヒントになっているものもあります．よく考えて解答してください．

1）関数 $f(x)$ が関数 $F(x)$ の導関数のとき，$F(x)$ は $f(x)$ の $\boxed{\text{原始関数}}$ であるという．このとき $\int f(x)dx = \boxed{F(x)+C}$ と書く．$\int f(x)dx$ は $f(x)$ の $\boxed{\text{不定積分}}$ と呼ばれる．$\boxed{\text{微分積分学}}$ の基本定理により，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \boxed{F(a)}$ である.

2) $f(x)$ と $g(x)$ を $(-\infty,\infty)$ で定義された，微分可能な関数とする．すべての実数 x に対し $f'(x)=g'(x)$ で，ある実数 a に対し $f(a)=g(a)$ となるなら，関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ は等しくなる．これは次のように示せる: $h(x)=f(x)-g(x)$ とすると，$h'(x)=\boxed{f'(x)-g'(x)=0}$ となる．したがって，$h(x)$ はすべての x で一定の値をとるが，この値を c とすると $c=h(a)=\boxed{f(a)-g(a)=0}$ したがって，$f(x)-g(x)=0$ がすべての x に対して成り立つ．つまり $f(x)\ \boxed{=}\ g(x)$ である.

3) $f(x)$, と $g(x)$ を微分可能な関数とするとき，$(f(x)g(x))' = \boxed{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$ である．この等式の両辺を積分して移項すると，部分積分の公式 $\int f'(x)g(x)dx = \boxed{f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$ が得られる.

4) $\int \sin x dx = \boxed{\cos x + C}$ だから，置換積分法により，$\int x^6 \sin x^7 dx = \boxed{\frac{1}{7}\cos x^7 + C}$ となる.

5) $f(x) = \log|\cos x|$ とすると，$f'(x) = \boxed{-\sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = -\tan x}$ だから，$\int \tan x dx = \boxed{-\log|\cos x| + C}$ である.

6) $f(x)$ を 3 回微分可能な関数とするとき，マクローリンの定理から，すべての x に対し，ある $0<\theta<1$ で，$f(x) = f(0) + f'(0)x + \boxed{\frac{1}{2}} f''(x)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\theta x)x^3$ となるものがとれる．これを用いて $e^{0.1}$ の近似計算をすることを考える．$(e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = \boxed{e^x}$ だから，$e^{0.1} = e^0 + e^0\cdot 0.1 + \boxed{\frac{1}{2}e^0\cdot(0.1)^2} + \frac{1}{3!}e^{\theta\cdot 0.1}\cdot(0.1)^3 = \boxed{1.105} + \frac{1}{3!}e^{\theta\cdot 0.1}\cdot(0.1)^3$ となる θ がとれる．$0 < e^{\theta\cdot 0.1} < e < 3$ だから，$0 < \frac{1}{3!}e^{\theta\cdot 0.1}\cdot(0.1)^3 < \boxed{0.0005}$ である．したがって，$\boxed{1.105} < e^{0.1} < \boxed{1.1055}$ となることがわかる.

7) $f(x)$ と $g(x)$ を 2 つの関数とするとき，区間 $[a,b]$ で $f(x) \le g(x)$ がつねに成り立つなら，xy-平面上 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ の 4 つの曲線で囲まれた領域の面積は，$\boxed{\int_a^b (g(x)-f(x))dx}$ で計算できる.

学部	学科	年次	学生証番号	番	氏名	

ウラに続く

II. $f(x) = xe^{-x}$ とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の増減表（$f'(x)$, $f''(x)$ の正負の表示を含むもの）を作成し，この関数の増加，減少，極大，極小，極値，凹凸，変曲点を調べよ．

(4) (3) を用いてグラフの概略図を描け．

(1): $f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - x(e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.
$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - x(e^{-x})) = -2e^{-x} + xe^{-x} = (-2+x)e^{-x}$.

(2): $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = -\infty$. ロピタルの定理から，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

(3):

x		0		1		2	
$f(x)$		0		$\frac{1}{e}$		$\frac{2}{e^2}$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

(4): 略.

III. $f(x) = e^x$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ とする．このとき

(1) 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, および y-軸と $x = \pi$ で囲まれる xy-平面上の領域を図示せよ．

(2) $0 \leq x$ となるすべての x に対し，$f(x) \geq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) (1) で求めた領域の面積を計算せよ．

(1): 略

(2): $0 \leq x$ なら，$f(x) \geq e^0 > 1\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}\sin 2x$ が成り立つ.

(3): $\displaystyle\int_0^\pi (e^x - \frac{1}{2}\sin 2x)dx = \left[e^x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^\pi = (e^\pi + \frac{1}{4}) - (1 + \frac{1}{4}) = e^\pi - 1$.