担当者: 渕野 昌 # 微分積分学 I 中間試験 **2006 年 5 月 29 日 施行**

教科書ノート持ち込み可．解答はこの用紙に記入してください．このテストの問題とその回答は試験終了後

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-2006s-chukan.pdf

として掲示します． **学籍番号:** **名前:**

(A) 1) 次の関数 $f(x)$ の導関数と二次導関数を求めよ:

(a) $f(x)=e^{\sin 2x}$

$f'(x)=(2\cos 2x)e^{\sin 2x}$

$f''(x)=(-4\sin 2x)e^{\sin 2x}+(4\cos^2 2x)e^{\sin 2x}$
$=4(\cos^2 2x-\sin 2x)e^{\sin 2x}$

(b) $f(x)=e^{-x}\sin x$

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$
$=\sqrt{2}e^{-x}\sin(x+\frac{3}{4}\pi)$

$f''(x)=2e^{-x}\sin(x+\frac{6}{4}\pi)$

(c) $f(x)=e^{2x+1}$

$f'(x)=2e^{2x+1}$

$f''(x)=4e^{2x+1}$

2) 1)(c) での関数 $f(x)$ の n 階の導関数 $f^{(n)}(x)$ は何か?

1)(c) の計算から $f^{(n+1)}(x)=2f^{(n)}(x)$ となることがわかる．よって，$f^{(n)}(x)=2^n e^{2x+1}$ がすべての n に対し成り立つ．

(B) 以下の $\boxed{\cdots}$ に，あてはまる数値，数式，用語，または，その他の表現を記入してください．

1) 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．12.34 が $f(x)$ と $f'(x)$ の定義域に含まれるとき $f'(12.34)$ は，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $\left(\boxed{12.34}, \boxed{f(12.34)}\right)$ での接線の $\boxed{\text{傾き}}$ を与える．よって，この接線は一次式:

$y-\boxed{f(12.34)}=\boxed{f'(12.34)}\left(x-\boxed{12.34}\right)$ であらわせることがわかる．

2) 関数 $f(x)$ が 2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ の合成関数として，$f(x)=g(h(x))$ とあらわされているとする．$g(x)$ と $h(x)$ の導関数をそれぞれ $g'(x)$, $h'(x)$ とすると，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，合成関数の微分法より，$f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$ となるから，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の点 x_0 での値は，$f'(x_0)=\boxed{g'(h(x_0))h'(x_0)}$ である．したがって，例えば $h'(6.54)=3$, $h(6.54)=2$, $h(2)=3$ $g(2)=4$, $g(3)=5$, $g'(6,54)=7$, $g'(2)=8$ なら，$f'(6.54)=\boxed{8\times 3=24}$ である．

3) 関数 $f(x)$ が 2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ の積 $f(x)=g(x)h(x)$ となっているとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $g(x)$ と $h(x)$ および，それらの導関数 $g'(x)$, $h'(x)$ を用いて，$f'(x)=\boxed{g'(x)h(x)+g(x)h'(x)}$ と書ける．

4) $f(x)=x^x$ の導関数は次のようにして求められる：まず，$e^{\log a}=\boxed{a}$ と $\log a^b=\boxed{b\log a}$ を使うと，$x^x=e^{\log x^x}=e^{x\log x}$ と変形できる．これに $(e^x)'=\boxed{e^x}$, $(\log x)'=\boxed{\frac{1}{x}}$, および，2) と 3) で見た合成関数の微分法，関数の積の微分法を適用すると，$(x^x)'=e^{x\log x}\cdot\left(\boxed{(x\log x)}\right)'=\boxed{(\log x+1)}\cdot e^{x\log x}=(\log x+1)x^x$ となる．この式と合成関数の微分法から，$\left((2x+1)^{2x+1}\right)'=\boxed{(\log(2x+1)+1)(2x+1)^{2x+1}}\cdot(2x+1)'=\boxed{2(\log(2x+1)+1)(2x+1)^{2x+1}}$ である．

5) $\left(\sin^{25}(2x+1)\right)'=25(\sin(2x+1))^{24}\cdot\boxed{(\sin(2x+1))'}=\boxed{50\sin^{24}(2x+1)\cos(2x+1)}$

6) $y=\log(x+1)$ のグラフは，$y=\log x$ のグラフを $\boxed{x}$ -軸方向に $\boxed{-1}$ だけ平行移動して得られる．$f(x)=\log(x+1)$ とするとき，関数 $f(x)$ の定義域は，$\boxed{(-1,\infty)}$ で $f(0)=\log\boxed{1}=\boxed{0}$ である．また $y=\log(x+1)$ を x について解くと $x=\boxed{e^y-1}$ となるから，$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とすると，$g(x)=\boxed{e^x-1}$ である．$g(x)$ の定義域は $\boxed{(-\infty,\infty)}$ で，$g(x)$ のとる値の範囲は，$\boxed{(-1,\infty)}$ である．

7) $y=4\sin(2x+\alpha)$ のグラフが何になるかを考える．まず，$y=\sin(2x+\alpha)$ のグラフを考えると，この式は $y=\sin(2(x+\frac{1}{2}\alpha))$ と書きなおせるから，このグラフは，$y=\sin 2x$ のグラフを $\boxed{x}$ -軸方向に $\boxed{-\frac{1}{2}\alpha}$ だけ平行移動して得られるものであることがわかる．一方 $y=\sin 2x$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフの $\boxed{x}$ -軸方向の縮尺を $\frac{1}{2}$ 倍にすることで得られる．もともと求めたかった $y=4\sin(2x+\alpha)$ のグラフは，$y=\sin(2x+\alpha)$ のグラフを $\boxed{y}$ -軸方向の縮尺を $\boxed{4}$ 倍にすることで得られる．

8) 6) の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフを互いの関係がわかるように工夫して右の空欄に描け．
また，漸近線や $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の対称軸などを破線で書きこむこと: