

教科書ノート持ち込み可。このテストの回答例を

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-2006s-chukan2.pdf>

として掲示します。

問題の解答では、途中計算を書いたり、どういう性質、定理を使ったかというコメントを加えたりして、どのように考えて答が得られたかが分かるように工夫してください。

1) 次の不定積分を計算しなさい:

$$a) \int x^2 - 2x + 3 \, dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + C$$

$$b) \int \sin(2\pi x + \frac{4}{3}\pi) \, dx = -\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x + \frac{4}{3}\pi) + C \quad (u = 2\pi x + \frac{4}{3}\pi \text{ と置いて置換積分する})$$

$$c)^1 \int \log(2x+1) \, dx = \int (x)' \log(x+1) \, dx \quad (\text{部分積分法による}) \\ = x \log(2x+1) - \int \frac{2x}{2x+1} \, dx = x \log(2x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) \, dx = x \log(2x+1) - x + \frac{1}{2} \log(2x+1) + C$$

$$d) \int \frac{1}{x^2+x-2} \, dx = \frac{1}{3} \left( \int \frac{1}{x-1} \, dx - \int \frac{1}{x+2} \, dx \right) \quad (\text{部分分数分解}) \\ = \frac{1}{3} (\log|x-1| - \log|x+2|) + C = \frac{1}{3} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

2) 次の定積分の計算をしなさい:

$$\int_0^1 \frac{1}{3x+1} \, dx \quad u = 3x+1 \text{ と置くと, } dx = \frac{1}{3} du, x=0 \text{ なら } u=1, x=1 \text{ なら } u=4 \text{ だから, 置換積分法により} \\ \text{与式} = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{3} [\log u]_1^4 = \frac{1}{3} \log 4 = \frac{2}{3} \log 2$$

3) 積分可能な続関数  $f(x)$  と微分可能な関数  $g(x)$  について,  $\int_{-1}^3 f(x) \, dx = 1, \int_3^8 f(x) \, dx = 2, f(-1) = 1, f(3) = 2, f(8) = 5, g(1) = -1, g(2) = 3$  であるとする。このとき, つぎの積分の値を求めなさい。

$$a) \int_{-1}^8 f(x) \, dx = \int_{-1}^3 f(x) \, dx + \int_3^8 f(x) \, dx = 1 + 2 = 3$$

$$b) \int_{-1}^8 x f'(x) \, dx = [x f(x)]_{-1}^8 - \int_{-1}^8 f(x) \, dx = 8 \times 5 - (-1 \times 1) - 3 = 38 \quad (\text{部分積分法による})$$

$$c) \int_1^2 2f(g(x))g'(x) \, dx \quad u = g(x) \text{ と置いて置換積分の定理を適用すると, 与式} = 2 \int_{-1}^3 f(u) \, du = 2 \times 1 = 2$$

4) 積分可能な関数  $f(x)$  と微分可能な関数  $g(x)$  について,  $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$  と置くと,  $x$  の関数  $\int_0^{g(x)} f(t) \, dt$  は  $F(g(x))$  とあらわせる。このことと, 微分積分学の基本定理と合成関数の微分法の定理を用いて,

$\frac{d}{dx} \left( \int_0^{g(x)} f(t) \, dt \right)$  が何になるかを答えなさい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int_0^{g(x)} f(t) \, dt \right) &= (F(g(x)))' \\ &= F'(g(x))g'(x) \quad (\text{合成関数の微分法の定理による}) \\ &= f(g(x))g'(x) \quad (\text{微分積分学の基本定理による}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> ヒント:  $\log(2x+1) = (x)' \log(2x+1)$  と考えて部分積分法を用いる。