担当者: 渕野 昌　　**微分積分学 I 中間試験**　　**2007 年 6 月 11 日 15:00〜16:20 （80 分） 施行**

解答例と解説

2007 年 07 月 17 日 (01:37)

$\boxed{1}$ 次の関数の導関数を求めよ:　(a) $2x^2 - x$　(b) $4e^{-2x+43}$　(c) $\sin(2x + \frac{3}{7}\pi)$　(d) $\cos(2x^2 - x)$

$\boxed{2}$ $f(x)$ を定義域が $(-\infty, \infty)$ で値域が $(1, \infty)$ の微分可能な関数とする．また $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} + 1$ とする．$f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ のとき，次に答えよ:

(a) $y = f(x)$ のグラフの点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

(b) $g(x)$ の定義域と値域を求めよ．　(c) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表(あらわ)せ[1]．

(d) $g'(1)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $h(x)$ を定義域が $(0, \infty)$ 値域が $[0, \frac{\pi}{2})$ の微分可能な関数として，$h_0(x) = \sin(h(x))$ とするとき次に答えよ:

(a) $h_0(x)$ の定義域と値域を求めよ．

(b) $h_0(x)$ の導関数 ${h_0}'(x)$ を $h(x)$ と $h'(x)$ を用いて表(あらわ)せ[2]．

(c) $h(27) = \dfrac{\pi}{4}$ で $h'(27) = 53$ のとき，${h_0}'(27)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ $f(x)$ を定義域が $(-\infty, \infty)$ 値域が $(0, \infty)$ の微分可能な増加関数とする[3]．$g(x) = (f(x))^x$ とするとき次に答えよ:

(a) $g(x)$ の定義域と値域が何になるか答えよ．

(b) $g'(x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表(あらわ)せ（ヒント: $f(x) = e^{\log(f(x))}$ となることを用いる）．

(c) $g(x)$ が増加関数であることを示せ．

$\boxed{5}$ $h(x) = e^{2x+1}$ の 1 次導関数，2 次導関数，3 次導関数を求めよ．これらの計算結果の類推から，e^{2x+1} の n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ を与える式を求めよ．

$\boxed{6}$ 自然数 $n \geq r$ に対し，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ だった．

(a) すべての自然数 $n \geq r$ に対し，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つことを示せ．

(b) すべての自然数 n に対し，${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$, ${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = n$, ${}_n\mathrm{C}_2 = {}_n\mathrm{C}_{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ となることを示せ．

$\boxed{7}$ $f(x)$ と $g(x)$ を n-回微分可能な関数とするとき，ライプニッツの定理により，

$$(f(x)g(x))^{(n)} = {}_n\mathrm{C}_0 f^{(n)}(x)g(x) + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x) + {}_n\mathrm{C}_3 f^{(n-3)}(x)g^{(3)}(x) + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} f^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x) + {}_n\mathrm{C}_n f(x)g^{(n)}(x)$$

である．これを用いて，x^2e^{2x} の n-次導関数を表(あらわ)す式を求めよ．

注意．ノートの持ち込みのみ可とします．解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．この試験の解答は返却しません．この試験の解答例を試験後に

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki1-ss07-chukan.pdf

に置きますので各自チェックしてください．

[1] 任意の微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ で $g(x)$ の定義域で $g(x) \neq 0$ がつねに成り立つとき，$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ となることを用いる．

[2] 合成関数の微分法を用いる．

[3] 関数 $f(x)$ が増加とは，$f(x)$ の定義域に属す任意の a, b, $a < b$ に対し，$f(a) < f(b)$ が成り立つことだった．

以下の解答例は計算間違いなどないように注意して作成していますが，もし何か間違や疑問点を発見したときには知らせてください．

$\boxed{1}$ 次の関数の導関数を求めよ: (a) $2x^2 - x$ (b) $4e^{-2x+43}$ (c) $\sin(2x + \dfrac{3}{7}\pi)$ (d) $\cos(2x^2 - x)$

"導関数" という用語にとまどってしまった人もいたようです．ある関数 $f(x)$ の "導関数" とは，この関数を微分したときに得られる関数 $f'(x)$ （別の記法では $\dfrac{df}{dx}$ または，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ など）のことです．(b), (c), (d) はべて合成関数の微分法の応用で計算できます．微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の合成 $g(f(x))$ の微分は，$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ となるのでした（教科書の定理 1.4）．

(a): $(2x^2 - x)' = 2 \cdot 2x - 1 = 4x - 1$ (b): $(4e^{-2x+43})' = 4e^{-2x+43} \cdot (-2x + 43)' = -8e^{-2x+43}$

(c): $(\sin(2x + \frac{3}{7}\pi))' = \cos(2x + \frac{3}{7}\pi) \cdot (2x + \frac{3}{7}\pi)' = 2\cos(2x + \frac{3}{7}\pi)$

(d): $(\cos(2x^2 - x))' = -\sin(2x^2 - x) \cdot (2x^2 - x)' = (1 - 4x)\sin(2x^2 - x)$

$\boxed{2}$ $f(x)$ を定義域が $(-\infty, \infty)$ で値域が $(1, \infty)$ の微分可能な関数とする．また $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} + 1$ とする．$f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ のとき，次に答えよ:

(a) $y = f(x)$ のグラフの点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

(b) $g(x)$ の定義域と値域を求めよ． (c) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表(あらわ)せ．

(d) $g'(1)$ を求めよ．

(a): 関数 $f(x)$ のグラフ $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ での接線の傾きがこの点での微分係数（つまり導関数のこの点での値 f'(a)）になるのでした．また，接線は点 $(a, f(a))$ を通るのだから，その方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ であらわされます．今，接線をえている点は $(1, 2)$ で $f'(1) = -3$ なので，上の接線の方程式は，$y - 2 = -3(x - 1)$ あるいはこれを変形して $y = -3x + 5$ となることがわかります．

(b): $g(x)$ 関数の定義域とは変数 x の動く範囲のことです．式で定義された関数については，定義のときに何も断らないときには，変数 x に入れたときに，この式が意味を持つような値の全体です．一方 $g(x)$ 値域とは, (教科書では) $g(x)$ の定義域からとってきた値を x に代入したときに $g(x)$ が返してくれる値の全体です．$g(x)$ の定義式 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} + 1$ を見ると，$f(x)$ の値が 0 になるような x では $g(x)$ はうまく定義されないことがわかります（数を 0 で割ることはできません!）．しかし， $f(x)$ の値域 $(1, \infty)$ は 0 を含んでいないので，$f(x)$ の定義域のすべての値に対して $g(x)$ の値が計算できることがわかります．したがって，$f(x)$ の定義域は $(-\infty, \infty)$ なので $g(x)$ の定義域も $(-\infty, \infty)$ となることがわかります．また，$f(x)$ の値が 1 から ∞ の間を動くとき，$\dfrac{1}{f(x)} + 1$ の値は，2 から 1 の間を動くので， $g(x)$ の値域は $(1, 2)$ です．

(c): $g'(x) = (\dfrac{1}{f(x)} + 1)' = \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$

(d): (c) の式から，$g'(1) = -\dfrac{f'(1)}{(f(1))^2} = -\dfrac{-3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{3}$ $h(x)$ を定義域が $(0, \infty)$ 値域が $[0, \dfrac{\pi}{2})$ の微分可能な関数として，$h_0(x) = \sin(h(x))$ とするとき次に答えよ:

(a) $h_0(x)$ の定義域と値域を求めよ．

(b) $h_0(x)$ の導関数 ${h_0}'(x)$ を $h(x)$ と $h'(x)$ を用いて表せ．

(c) $h(27) = \dfrac{\pi}{4}$ で $h'(27) = 53$ のとき，${h_0}'(27)$ を求めよ．

(a): $\sin x$ の定義域は $(-\infty, \infty)$ なので，$h_0(x)$ の定義域は $h(x)$ の定義された範囲全体，つまり $h(x)$ の定義域になります．したがって，$h_0(x)$ の定義域は $(0, \infty)$ です．$h(x)$ の値域は $[0, \frac{\pi}{2})$ ですが，$\sin x$ の変数 x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くと $\sin x$ の値は 0 から 1 まで動くので， $h_0(x)$ の値域は $[0, 1)$ となることがわかります．

(b): $(\sin x)' = \cos x$ なので，合成関数の微分法により $(h_0)'(x) = \cos(h(x))h'(x)$.

(c): $x = 27$, $h(27) = \frac{\pi}{4}$, $h'(27) = 53$ を上の式に代入すると $(h_0)'(27) = \cos(h(27))h'(27) = \cos(\frac{\pi}{4}) \cdot 53 = \dfrac{53\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{4}$ **この問題は，出題ミスで，(a) と (c) が不定な（つまり $f(x)$ によって答が変ったり，(c) では示すべき主張が成り立たなくなったりする）ものになっていました．そこで次の問題に置き換えたものを考えることにします．変更個所は $f(x)$ の値域に関する条件と $f(x)$ の単調性に関する条件です．**

$f(x)$ を定義域が $(-\infty, \infty)$ 値域が $[2, \infty)$ の微分可能な関数で，$(0, \infty)$ で増加 $(-\infty, 0)$ で減少とする[4]．$g(x) = (f(x))^x$ とするとき次に答えよ:

(a) $g(x)$ の定義域と値域が何になるか答えよ．

(b) $g'(x)$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ．

(c) $g(x)$ が増加関数であることを示せ．

(a): $f(x)$ の定義域は $(0, \infty)$ だから，特にすべての実数 x に対し $f(x) > 2$ となる．また $f(x)$ の定義域は $(-\infty, \infty)$ である．したがって $(f(x))^x$ はすべての実数 x で計算できる．このことから，$g(x)$ の定義域は $(-\infty, \infty)$ であることがわかります．
仮定から，すべての実数 x に対し，$f(x) > 2$ である．よって，すべての $x > 0$ に対し，$g(x) = (f(x))^x \geq (f(2))^x = 2^x$ である．したがって，$\infty = \lim_{x\to\infty} 2^x \leq \lim_{x\to\infty} (f(x))^x = \lim_{x\to\infty} g(x)$ となり，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ がわかる．同様に，すべての $x < 0$ に対し，$g(x) = (f(x))^x < (f(2))^x = 2^x$ となるから，$0 = \lim_{x\to-\infty} 2^x \geq \lim_{x\to-\infty} (f(x))^x = \lim_{x\to-\infty} g(x) \geq 0$ から，$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ である．
以上と，$g(x)$ は定義の仕方から連続であることから[5]，$g(x)$ の値域は $(0, \infty)$ となることがわかります．

(b): $f(x) = e^{\log f(x)}$ と書けるので，$g(x) = (f(x))^x = \left(e^{\log f(x)}\right)^x = e^{x \log f(x)}$ です．$(e^x)' = e^x$ だったので，合成関数の微分法を何回か使うと，$g'(x) = e^{x\log(f(x))}(x\log(f(x)))' = e^{x\log(f(x))}(\log(f(x)) + \dfrac{x}{f(x)} f'(x))$ がわかります．

(c): まず，

(*) $1 < c < d$ とするとき，$0 \leq a < b$ なら，$c^a < d^a < d^b$ が成立ち，

(**) $a < b \leq 0$ なら $d^a = \dfrac{1}{d^{|a|}} < \dfrac{1}{c^{|a|}} < \dfrac{1}{c^{|b|}} < c^b$ が成り立つ

ことを注意しておきます．
$f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で増加関数であることを証明するには，$f(x)$ が $(-\infty, 0]$, と $[0, \infty)$ のそれぞれの区間で増加であることを示せば十分です．
まず，$0 \leq a < b$ とすると，$1 < 2 \leq f(a) < f(b)$ となるので，(*) から，$g(a) = (f(a))^a < (f(b))^b = g(b)$ がわかり，このことから，$g(x)$ は区間 $[0, \infty)$ で増加であることが結論できます．同様に，$a < b < 0$ のときには，$1 < 2 \leq f(b) < f(a)$ となるので，(**) から $g(a) = (f(a))^a < (f(b))^b = g(b)$ がわかり，$g(x)$ は区間 $(-\infty, 0]$ でも増加であることが結論できます．

$\boxed{5}$ $h(x) = e^{2x+1}$ の 1 次導関数，2 次導関数，3 次導関数を求めよ．これらの計算結果の類推から，e^{2x+1} の n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ を与える式を求めよ．

合成関数の微分法により，$h'(x) = 2e^{2x+1}$, $h''(x) = 2 \cdot 2e^{2x+1}$, $h'''(x) = 2 \cdot 2 \cdot 2e^{2x+1} \cdots$ となって，微分するごとに 2 倍になるから，$h^{(n)}(x) = 2^n e^{2x+1}$ となることがわかる．

$\boxed{6}$ (a) すべての自然数 $n \geq r$ に対し，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つことを示せ．

(b) すべての自然数 n に対し，${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$, ${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = n$, ${}_n\mathrm{C}_2 = {}_n\mathrm{C}_{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ となることを示せ．

(a): ${}_n\mathrm{C}_r$ の定義から，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \dfrac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$.

(b): ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n$, ${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1}$, ${}_n\mathrm{C}_2 = {}_n\mathrm{C}_{n-2}$ は (a) によりよい．また，${}_n\mathrm{C}_0 = \dfrac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 1} = 1$, ${}_n\mathrm{C}_1 = \dfrac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$, ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \dfrac{n(n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ である．

$\boxed{7}$ ライプニッツの定理を用いて，$x^2 e^{2x}$ の n-次導関数を表す式を求めよ．

---

[4]関数 $f(x)$ がある区間 (a, b) で増加とは，(a, b) に属す任意の a, b, $a < b$ に対し，$f(a) < f(b)$ が成り立つことだった．また $f(x)$ が区間 (a, b) で減少とは，(a, b) に属す任意の a, b, $a < b$ に対し，$f(a) > f(b)$ が成り立つことである．

[5]ここで，区間上の連続関数の値域は区間になる，という事実が使われている．

$(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)^{(3)} = (x^2)^{(4)} = \cdots = 0$ である．また，$\boxed{5}$ と同様に，$(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$ となることがわかる．これをライプニッツの定理の公式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&(x^2e^{2x})^{(n)} \\
&= \underbrace{{}_n\mathrm{C}_0\,\overbrace{(x^2)^{(n)}}^{=0}\,e^{2x}}_{=0} + \cdots + \underbrace{{}_n\mathrm{C}_{n-3}\,\overbrace{(x^2)^{(3)}}^{=0}(e^{2x})^{(n-3)}}_{=0} + {}_n\mathrm{C}_{n-2}(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)} + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_n x^2(e^{2x})^{(n)} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 2^{n-2}e^{2x} + n\cdot 2x\cdot 2^{n-1}e^{2x} + 1\cdot x^2\cdot 2^n e^{2x} \\
&= 2^{n-2}(n(n-1) + 4nx + 4x^2)e^{2x}
\end{aligned}
$$

が得られる．念のため，x^2e^{2x} の 2 階微分を直接計算して，係数を比べて検算しておくことにする:

$$
\begin{aligned}
(x^2e^{2x})' &= 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} \\
(x^2e^{2x})'' &= 2e^{2x} + 4xe^{2x} + 4xe^{2x} + 4x^2e^{2x} \\
&= 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}
\end{aligned}
$$

となるから，これは上で得られた式の n に 2 を代入したものと一致する[6]．

[6] もちろん，たまたま $n = 2$ を代入したときに，得られた式が正しくなっているだけの場合もありえるので，この検算では，得られた式がすべての n に対して成り立つことの 100% の検証ができるわけではありません．しかし，このようなチェックをすることで，簡単な計算ミスによる間違いを発見することができます．実際，私がこの解答を作ったときの最初の計算では，寝ぼけていて間違った結果が出してしまっていたのですが，ここで見たようなやりかたでチェックすることで間違いを発見して計算ミスを正すことができました．また，ここでは，ライプニッツの定理の式への代入の計算の大筋自身は間違っていないはずなので，そのことをふまえると，この 2 階導関数の直接計算の結果との整合性のチェックだけでも，かなり高い確率で答の正しさの保証が得られていると考えてもいはずです．