微分積分学 II　期末試験のための演習問題

淵野 昌

fuchino@isc.chubu.ac.jp

July 12, 2006

last modified on: July 26, 2006

淵野担当の微分積分学 II で 7 月 12 日に行なった期末試験のための演習の解答例とそこでの考え方を示します.

解答例は計算ミスなどがないよう注意して書いたつもりですが，もし間違えを発見した場合には，上記のアドレス宛にメールで書いて知らせてください．妥当な指摘をしてくれた人には，成績評価の際に配慮します.
このテキストは

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki2-2006s-kimatsu-uebung.pdf

としてダウンロードできます.

科目名	微分積分学 II	担当者名	渕野　昌	所要時間	75 分	2006 年 7 月 吉日 (月) xx:xx〜xx:xx 施行
持込	試験当日は 不可					
添付する解答用紙	1 枚配付（問題用紙の回収 要・否）		計算用紙 0 枚配付			

演習問題

この問題と解答用紙は回収しません．持ちかえって見なおしておいてください．17 日の講義で必要と思われる問題について解説します．また，演習の実施後に，解説と解答例を http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu//biseki2-2006s-kimatsu-uebung.pdf に掲示します．また http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/index.html にこの解説と解答例を含めた，微分積分学 II に関連したノートなどがリンクしてあるので参考にしてください．

1. $f(x,y) = -4x^2y + xy + 3y^2$ とするとき，次の問に答えてください．
(a) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めてください．
(b) $f(1,2)$ の値を求めてください．
(c) $z = f(x,y)$ のグラフの，点 $(1,2,f(1,2))$ での接線の方程式を求めてください．
(d) $f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の図形の，点 $(1,1)$ での接線を求めてください．
(e) $f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の図形を図示してください．

2. (a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ として，$f(x,y)$ が極値をとる点があれば，この点と，そこでの f の値を求めてください．もしなければ，なぜないと結論できるかを説明しなさい．
(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$ として，$f(x,y)$ が極値をとる点があれば，この点と，そこでの f の値を求めてください．もしなければ，なぜないと結論できるかを説明しなさい．

3. 定数 C に対し，$f(x) = \dfrac{x}{2}\log x - \dfrac{x}{4} + \dfrac{C}{x}$ $(x \neq 0)$ とする．　(a) $f(x)$ は微分方程式 $xy' + y = x\log x$ の解となることを示してください．　(b) (a) の微分方程式の解で，条件 $f(1) = 0$ を満たすものを求めてください．

4. $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ とするとき，$x^2 + y^2 = 1$ 条件の下で $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を求めてください．講義でも述べたように，$f(x,y)$ は連続で，$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は有界閉曲線だから，$f(x,y)$ は $x^2 + y^2 = 1$ 条件の下で最大値と最小値をとる．それらの値を求めてください．

5. 次の不等式 (α), (β) を満たす点 (x,y,z) の全体からなる空間領域の体積 V を求めたい．

(α)　$0 \leq z \leq \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$,
(β)　$x^2 + y^2 \leq 2$.

以下の $\boxed{ア}$ 〜 $\boxed{ク}$ にあてはまる，語句，数値，または，式は何かを答えてください．
式 (α) は，z の値が，点 (x,y) の xy-平面上での原点からの $\boxed{ア}$ の $\boxed{イ}$ 乗より小さいか等しいことを主張している．一方，式 (β) は，点 (x,y) の $\boxed{ウ}$ からの距離が $\boxed{エ}$ より小さいか等しいことを主張している．
$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ とすると，$V = \displaystyle\iint_D \boxed{オ}\, dxdy$ である．極座標変換で D に対応する $r\theta$-平面上の領域を Δ とすると，$\Delta = \{(r,\theta) \mid \boxed{カ}\ \}$ となり，$V = \displaystyle\iint_\Delta \boxed{キ}\, drd\theta$ である．これを計算すると $\boxed{ク}$ となる．

問題の解説

1. $f(x,y) = -4x^2y + xy + 3y^2$ **とするとき，次の問に答えてください．**

(a) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ **を求めてください．**

$f_x(x,y) = -8xy + y$, $f_y(x,y) = -4x^2 + x + 6y$.

(b) $f(1,2)$ **の値を求めてください．**

$f(x,y)$ の式に $x=1$, $y=2$ を代入すると，$f(1,2) = -4 \times (1)^2 \times 2 + 1 \times 2 + 3 \times 2^2 = 6$.

(c) $z = f(x,y)$ **のグラフの，点** $(1,2,f(1,2))$ **での接線の方程式を求めてください．**

(a) での結果に $x=1$, $y=2$ を代入すると，$f_x(1,2) = -8 \times 1 \times 2 + 2 = -14$, $f_y(1,2) = -4 \times 1^2 + 1 + 6 \times 2 = 9$ となる．また，(b) により $f(1,2) = 6$ だから，接平面の方程式は，$z - 6 = -14(x-1) + 9(y-2)$. あるいは，この式を整理して，$z = -14x + 9y + 2$ である．

(d) $f(x,y) = 0$ **によって定まる** xy**-平面上の図形の，点** $(1,1)$ **での接線を求めてください．**

$f(1,1,) = -4 \times 1^2 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1^2 = 0$ となるから，$(1,1)$ は確かに $f(x,y) = 0$ を満たす点となっている．$f_y(1,1) = -4 \times 1^2 + 1 + 6 \times 1 = 3 \neq 0$ だから，陰関数の定理を，$f(x,y) = 0$ の $(1,1)$ の近くで適用することができる．$f(x,y) = 0$ を満たす点の集合が $(1,1)$ の近くで，関数 $\varphi(x)$ のグラフと一致するとして，$\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ となる．$f_x(1,1) = -8 \times 1 \times 1 + 1 = -7$ だから，$\varphi'(x)$ の $x = 1$ での値は，$-\dfrac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\dfrac{-7}{3} = \dfrac{7}{3}$ したがって，$(1,1)$ での $f(x,y) = 0$ のグラフへの接線（$=$ $(1,1)$ での $y = \varphi(x)$ の接線）の方程式は，$y - 1 = \dfrac{7}{3}(x-1)$ である．

(e) $f(x,y) = 0$ **によって定まる** xy**-平面上の図形を図示してください．**

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow -4x^2y + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y(-4x^2 + x + 3y) = 0 \Leftrightarrow$
$y = 0$ または $-4x^2 + x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ または，$y = \dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{1}{3}x$
したがって，$f(x,y) = 0$ によって定まる xy-平面上の図形は，$y = 0$ のグラフ（つまり x-軸）と二次曲線 $y = \dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{1}{3}x$ を合わせたものになっている．

2. (a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ **として，**$f(x,y)$ **が極値をとる点があれば，この点と，そこでの** f **の値を求めてください．もしなければ，なぜないと結論できるかを説明しなさい．**

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y$ だから，$f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) は連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

つまり，

$$\begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

を満たす．上の連立方程式を解くと，$x = 0$, $y = 0$ を得るから，$(0,0)$ が関数 $f(x,y)$ が極値をとる可能性のある点の唯一の候補である．ところが，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ だから，

$$\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=0}\right)^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=0} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x=0,y=0} = 2^2 - 6\cdot(-2) = 16 > 0$$

となり[1]，極値の判定法（教科書の定理 7.3）により $f(x,y)$ はこの点で極値をとらない．したがって，$f(x,y)$ は極値をとる点を持たないことが結論できる．

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$ として，$f(x,y)$ が極値をとる点があれば，この点と，そこでの f の値を求めてください．もしなければ，なぜないと結論できるかを説明しなさい．

(a) と同様にして，$f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) は連立方程式

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

を満たさなくてはならないことわかる．この方程式を解くと $x=0, y=0$ となる．ところが，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ だから，

$$\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=0}\right)^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=0} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x=0,y=0} = (-2)^2 - 2\cdot(-2) = 8 > 0$$

となる．したがって，この場合にも極値の判定法（教科書の定理 7.3）により $f(x,y)$ が $(0,0)$ で極値をとらないことがわかる．[このことは次のようにして見ることもできる: 点 $(0,0)$ とその近傍での $f(x,y)$ の値の様子を見てみることにする．$f(0,0)=0$ で，$x \neq 0$ として，$y=2x$ のときには，$f(x,y) = x^2 - 4x^2 - 4x^2 = -7x^2 < 0$ また $y = \dfrac{x}{4}$ のときには，$f(x,y) = x^2 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{16} = \dfrac{7x^2}{16} > 0$ となっていることがわかる．$y=2x$ あるいは $y = \dfrac{x}{4}$ を満たすような (x,y) は $(0,0)$ のどんな近くでもとれる．したがって，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極値をとらないことが結論できる．] $(0,0)$ は $f(x,y)$ が極値をとる可能性のある唯一の点だったから，以上で $f(x,y)$ はどこでも極値をとらないことが示せた．

3. 定数 C に対し，$f(x) = \dfrac{x}{2}\log x - \dfrac{x}{4} + \dfrac{C}{x}$ $(x \neq 0)$ とする． (a) $f(x)$ は微分方程式 $xy' + y = x\log x$ の解となることを示してください．

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{C}{x^2}$ だから，

$$xf'(x) + f(x) = \frac{x}{2}\log x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{C}{x} + \frac{x}{2}\log x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x} = x\log x$$

となる．したがって，$f(x)$ は確かに微分方程式 $xy' + y = x\log x$ の解になっていることがわかる．

(b) (a) の微分方程式の解で，条件 $f(1) = 0$ を満たすものを求めてください．

(a) により，$f(x) = \dfrac{x}{2}\log x - \dfrac{x}{4} + \dfrac{C}{x}$ が微分方程式 $xy' + y = x\log x$ の一般解となるが，$\log 1 = 0$ より，$f(1) = -\dfrac{1}{4} + C$ だから，$f(1) = 0$ なら $C = \dfrac{1}{4}$ である．したがって，$f(x) = \dfrac{x}{2}\log x - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4x}$ がこの初期条件を満たす解であることがわかる．

---

[1] φ が $x, y, \ldots$ を変数として持つ表現（項）のとき，$\varphi|_{x=a,y=b,\ldots}$ で φ にあらわれる $x, y, \ldots$ に値 $a, b, \ldots$ を 代入して得られる結果を表わす．この記法は講義でも度々使われていた．たとえばここでの場合のように，$\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ と 書くと，$f(a,b)$ という定数を与える関数を x で偏微分したものを意味するのか，それとも $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ という偏導関数の変数に値 a, b を代入したものを意味するか分らない曖昧な表現になってしまうため，このような記法ではっきりと区別したほうがよい場合が出てくるのである．

4. $f(x,y)=x^2+4xy+4y^2$ **とするとき，** $x^2+y^2=1$ **条件の下で** $f(x,y)$ **が極値をとる点の候補を求めてください．講義でも述べたように，** $f(x,y)$ **は連続で，** $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ **は有界閉曲線だから，** $f(x,y)$ **は** $x^2+y^2=1$ **条件の下で最大値と最小値をとる．それらの値を求めてください．**

$g(x,y)=x^2+y^2-1$ とすると，$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow g(x,y)=0$ である．

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2x+4y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=4x+8y,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)=2x,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)=2y$$

だから，ラグランジュの未定乗数法（教科書の定理 7.5）により，$f(x,y)$ が $x^2+y^2=1$ の条件の下で極値をとるような点の候補 (x,y) は，ある定数 α とともに，方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & (1) \\ 2x+4y+2\alpha x=0 & (2) \\ 4x+8y+2\alpha y=0 & (3) \end{cases}$$

を満たす．(2) から，$2y=-(1+\alpha)x$ となるから，これを (3) に代入して，

$$4x-4(1+\alpha)x-\alpha(1+\alpha)x=0 \Leftrightarrow -\alpha(\alpha+5)x=0$$

を得る．したがって，$x=0$ または，$\alpha=-5$ または $\alpha=0$ である．
$x=0$ だとすると，(1) から，$y=\pm 1$ となるが，これを (2) に代入すると，$\pm 4=0$ となり矛盾である．
$\alpha=-5$ とすると，これを (2) に代入して，

$$-8x+4y=0 \Leftrightarrow y=2x \qquad (2')$$

を得る．(2') を (1) に代入して，

$$x^2+4x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

したがって，(2') から $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ となる．
$\alpha=0$ だとすると，(2) から，

$$x=-2y \qquad (2'')$$

となるから，これを (1) に代入して，

$$4y^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる．したがって (2'') から $x=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$ である．以上から，$(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$, $(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ の 4 つの点が $f(x,y)$ が $x^2+y^2=1$ の条件の下で極値をとる点の候補となる．$f(x,y)$ のこれらの点での値を計算してみると，

$$f(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{5}+4\times\frac{2}{5}+4\times\frac{4}{5}=5,$$
$$f(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{5}+4\times\frac{2}{5}+4\times\frac{4}{5}=5,$$

$$f(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5} - 4 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = 0,$$
$$f(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5} - 4 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = 0$$

となる．$f(x, y)$ の値の $x^2+y^2=1$ の条件下での最大値と最小値はこの中に含まれているのであるから，$f(x, y)$ は $x^2+y^2=1$ の条件下で，点 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ と点 $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ で最大値 5 をとり，点 $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ と点 $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ で最小値 0 をとることがわかる．

5. 次の不等式 (α), (β) を満たす点 (x, y, z) の全体からなる空間領域の体積 V を求めたい．

(α) $0 \le z \le \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$,

(β) $x^2+y^2 \le 2$.

以下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ にあてはまる，語句，数値，または，式は何か?

式 (α) は，z の値が，点 (x, y) の xy-平面上での原点からの $\boxed{\text{距離}}$ の $\boxed{3}$ 乗より小さいか等しいことを主張している．一方，式 (β) は，点 (x, y) の $\boxed{\text{原点}}$ からの距離が $\boxed{\sqrt{2}}$ より小さいか等しいことを主張している．

$D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \le 2\}$ とすると，$V = \displaystyle\iint_D \boxed{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy$ である．極座標変換で D に対応する $r\theta$-平面上の領域を Δ とすると，$\Delta = \{(r, \theta) \mid \boxed{0 \le r \le \sqrt{2},\, 0 \le \theta < 2\pi}\}$ となり，$V = \displaystyle\iint_\Delta \boxed{r^3 \cdot r}\, drd\theta$ である[2]．これを計算すると $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^4 drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{5}\pi}$ となる．

[2] 座標変換による二重積分の定理（教科書の定理 6.2）により，二重積分を極座標変換したときには $dxdy \longrightarrow rdrd\theta$ となるのだった．