

微分積分学 II 期末試験の解説と解答例

渕野 昌

fuchino@isc.chubu.ac.jp

July 23, 2006

last modified on: August 11, 2006

渕野担当の微分積分学 II で 2006 年 7 月 24 日に行なった期末試験の解答例とそこでの考え方を示します。

解答例は計算ミス，誤植などはないよう注意して書いたつもりですが，もし疑問点があれば，遠慮なく質問してください。

このテキストは

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/biseki2-2006s-kimatsu.pdf>

としてダウンロードできます。

科目名	微分積分学 II	担当者名	瀧野 昌	所要時間	75 分	2006 年 7 月 24(月) 11:10 ~ 12:25 施行
持込	不可					
添付する 解答用紙	1 枚配付 (問題用紙の回収 要・ <input checked="" type="checkbox"/>)			計算用紙 0 枚配付		

試験の終了後に、解説と解答例を <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu//biseki2-2006s-kimatsu.pdf> に掲示します。また <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/index.html> にもこの解説と解答例を含めた、微分積分学 II に関連したノートなどがリンクしてあります。

1. $f(x, y) = -4x^2y + xy + 3y^2$ とするとき、次の間に答えてください。

- (a) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めてください。
- (b) $f(1, 2)$ の値を求めてください。
- (c) $z = f(x, y)$ のグラフの、点 $(1, 2, f(1, 2))$ での接平面の方程式を求めてください。
- (d) $f(x, y) = 0$ によって定まる xy -平面上の図形の、点 $(1, 1)$ での接線を求めてください。
- (e) $f(x, y) = 0$ によって定まる xy -平面上の図形は何になるかを説明してください。またこれを図示してください。

2. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ として、 $f(x, y)$ が極値をとる点があれば、この点と、そこでの f の値を求めてください。もしなければ、なぜないと結論できるかを説明しなさい。

3. 2 変数の関数 $f(x, y)$ がある微分可能な 1 変数の関数 $g(z)$ により、 $f(x, y) = g(\frac{y}{x})$ とあらわせるとする。

- (a) $g(z)$ の定義域が $[0, \infty)$ のとき、 $f(x, y)$ の定義域は何かを答えなさい。
- (b) $f(x, y)$ は偏微分方程式 $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たすことを示してください。

4. $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ とするとき、 $2x^2 + 3y^2 = 1$ 条件の下で $f(x, y)$ が極値をとる点の候補を求めてください。講義でも述べたように、 $f(x, y)$ は連続で、 $\{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 = 1\}$ は有界閉曲線だから、 $f(x, y)$ は $2x^2 + 3y^2 = 1$ 条件の下で最大値と最小値をとる。それらの値を求めてください。

5. (a) 以下の ア ~ ク にあてはまる、語句、数値、または、式は何かを答えてください。

次の不等式 (α), (β) を満たす点 (x, y, z) の全体からなる空間領域の体積 V を求めたい。

$$(\alpha) \quad x - 2 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$(\beta) \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

式 (α) は、 z の値が、 $x - 2$ の値と、点 (x, y) の xy -平面上での原点からの ア の イ 乗の間にあることを主張している。一方、式 (β) は、点 (x, y) の ウ からの距離が エ より小さいか等しいことを主張している。

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ とすると、 $V = \iint_D$ オ $dxdy$ である。極座標変換で D に対応する $r\theta$ -平面上の領域を Δ とすると、 $\Delta = \{(r, \theta) \mid$ カ $\}$ となり、 $V = \iint_{\Delta}$ キ $drd\theta$ である。これを計算すると ク となる。

(b) (a) で体積を求めた立体を図示してください。

1. (a): $f_x(x, y) = -8xy + y, f_y(x, y) = -4x^2 + x + 6y.$

(b): $f(x, y)$ の式に $x = 1, y = 2$ を代入すると, $f(1, 2) = -4 \times (1)^2 \times 2 + 1 \times 2 + 3 \times 2^2 = 6.$

(c): (a) での結果に $x = 1, y = 2$ を代入すると, $f_x(1, 2) = -8 \times 1 \times 2 + 2 = -14, f_y(1, 2) = -4 \times 1^2 + 1 + 6 \times 2 = 9$ となる. また, (b) により $f(1, 2) = 6$ だから, 接平面の方程式は, $z - 6 = -14(x - 1) + 9(y - 2).$ あるいは, この式を整理して, $z = -14x + 9y + 2$ である.

(d): $f(1, 1) = -4 \times 1^2 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1^2 = 0$ となるから, $(1, 1)$ は確かに $f(x, y) = 0$ を満たす点となっている. $f_y(1, 1) = -4 \times 1^2 + 1 + 6 \times 1 = 3 \neq 0$ だから, 陰関数の定理を, $f(x, y) = 0$ の $(1, 1)$ の近くで適用することができる. $f(x, y) = 0$ を満たす点の集合が $(1, 1)$ の近くで, 関数 $\varphi(x)$ のグラフと一致するとして, $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ となる. $f_x(1, 1) = -8 \times 1 \times 1 + 1 = -7$ だから, $\varphi'(x)$ の $x = 1$

での値は, $-\frac{f_x(1, 1)}{f_y(1, 1)} = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}$ したがって, $(1, 1)$ での $f(x, y) = 0$ のグラフへの接線 (= $(1, 1)$ での

$y = \varphi(x)$ の接線) の方程式は, $y - 1 = \frac{7}{3}(x - 1)$ である.

(e): $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow -4x^2y + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y(-4x^2 + x + 3y) = 0 \Leftrightarrow$

$y = 0$ または $-4x^2 + x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ または, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x$

したがって, $f(x, y) = 0$ によって定まる xy -平面上の図形は, $y = 0$ のグラフ (つまり x -軸) と二次曲線 $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x$ を合わせたものになっている.

2. $f_x(x, y) = 6x + 2y, f_y(x, y) = 2x - 2y$ だから, $f(x, y)$ が極値をとる点 (x, y) は連立方程式 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ つまり, $\begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ を満たす. この連立方程式を解くと, $x = 0, y = 0$ を得る

から, $(0, 0)$ が関数 $f(x, y)$ が極値をとる可能性のある点の唯一の候補である. ところが, $f_{xx}(x, y) = 6, f_{xy}(x, y) = 2, f_{yy}(x, y) = -2$ だから, $(f_{xy}(0, 0))^2 - f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) = 2^2 - 6 \cdot (-2) = 16 > 0$ となる. したがって極値の判定法 (教科書の定理 7.3) により $f(x, y)$ はこの点で極値をとらない. よって, $f(x, y)$ は極値をとる点を持たないことが結論できる.

3. (a): (x, y) が $f(x, y)$ の定義域の要素 $\Leftrightarrow \frac{y}{x}$ が定義できて $\frac{y}{x} \geq 0 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ かつ } y \geq 0)$ または $(x < 0 \text{ かつ } y \leq 0)$

となるから, $f(x, y)$ の定義域は $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0 \text{ かつ } y \geq 0) \text{ または } (x < 0 \text{ かつ } y \leq 0)\}.$

(b): $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ とすると, $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot -\frac{y}{x^2}, \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$ だから, $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) + \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = -g'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{y}{x^2} + g'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{y}{x^2} = 0$ となり, この $f(x, y)$ は確かに微分方程式 $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たすことがわかった.

学部	学科	年次	学生証番号	番	氏名
----	----	----	-------	---	----

4. ラグランジュの未定乗数法により、極値をとる点の候補 (x, y) はもう一つの変数 λ とともに次の連立方程式を満たす:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 4xy + 4y^2 + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 1)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 4xy + 4y^2 + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 & \dots (1) \\ (2 + 4\lambda)x + 4y = 0 & \dots (2) \\ 4x + (8 + 6\lambda)y = 0 & \dots (3) \end{cases}$$

(2) から $y = -\frac{1}{2}(1+2\lambda)x \dots (2)'$ となるが (2)' を (3) に代入すると $4x - (8+6\lambda) \cdot -\frac{1}{2}(1+2\lambda)x \Leftrightarrow x(4 - (4+3\lambda)(1+2\lambda)) = 0$
 $\Leftrightarrow x(4 - (8+3)\lambda - 6\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow x\lambda(11+6\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \lambda = 0$ または $\lambda = -\frac{11}{6}$.

$x = 0$ なら、これを (2) に代入すると $y = 0$ となるが、この x, y の値は (1) を満たさないから不適当である。

$\lambda = 0$ とすると、これを (2) に代入すると $x = -2y$ となるから、これを (1) に代入して $y = \pm\sqrt{\frac{1}{11}}$ したがって $x = \mp 2\sqrt{\frac{1}{11}}$.

$\lambda = -\frac{11}{6}$ なら、これを (3) に代入して $4x + (8 - 11)y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y$. これを (1) に代入すると $2(\frac{3}{4}y)^2 + 3y^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{9}{8}y^2 + 3y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{8}{33}}, x = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{33}} = \pm\sqrt{\frac{3}{22}}$ となる。したがって $(\mp 2\sqrt{\frac{1}{11}}, \pm\sqrt{\frac{1}{11}}), (\pm\sqrt{\frac{3}{22}}, \pm\sqrt{\frac{8}{33}})$ が極値をと

る点の候補となる。ここで $f(\mp 2\sqrt{\frac{1}{11}}, \pm\sqrt{\frac{1}{11}}) = (\mp 2\sqrt{\frac{1}{11}})^2 + 4 \times (\mp 2\sqrt{\frac{1}{11}}) \times (\pm\sqrt{\frac{1}{11}}) + (\pm\sqrt{\frac{1}{11}})^2 = \frac{4}{11} - \frac{8}{11} + \frac{1}{11} = -\frac{3}{11}$,

$f(\pm\sqrt{\frac{3}{22}}, \pm\sqrt{\frac{8}{33}}) = (\pm\sqrt{\frac{3}{22}})^2 + 4 \times (\pm\sqrt{\frac{3}{22}}) \times (\pm\sqrt{\frac{8}{33}}) + (\pm\sqrt{\frac{8}{33}})^2 = \frac{3}{22} + \frac{8}{11} + \frac{8}{33} = \frac{73}{66}$ となる。講義で述べられた

ように、有界閉曲線上の連続関数は必ず最大値と最小値をとることが知られているので、 $f(x, y)$ は、 $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ の条件のもとで、 $(\pm\sqrt{\frac{3}{22}}, \pm\sqrt{\frac{8}{33}})$ で最大値 $\frac{73}{66}$ をとり、 $(\mp 2\sqrt{\frac{1}{11}}, \pm\sqrt{\frac{1}{11}})$ で最小値 $-\frac{3}{11}$ をとることがわかる。

5.(a)

ア 距離

イ 3

ウ 原点

エ $\sqrt{2}$

オ $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - (x - 2)$

カ $0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

キ $r^4 - r^2 \cos \theta + 2$

ク $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r^4 - r^2 \cos \theta + 2r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5}r^5 - \frac{1}{3}r^3 \cos \theta + r^2 \right]_{r=0}^{\sqrt{2}} d\theta$
 $= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \theta + 2 \right) d\theta = \left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} + 2 \right) \theta - \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \theta \right]_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{20 + 8\sqrt{2}}{5} \pi$

5.(b) 略.