面積のない図形について

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

May 30, 2005　中部大学理学教室コロキウムにて講演

本講演は，必ずしも数学を専門としない方むけの一般講演，というつもりです．そのため，数学者の方には多少退屈な講演となるかもしれません．このような一般講演のプレゼンテーションのたたき台のようなもの思って聞いていただければ幸です．なお，6 月 28 日には，名古屋大学での数学基礎論セミナーで，数学を専門とする方のための，関連テーマのもう少し掘り下げた一般講演を行う予定でいます．

面積のない図形

「平面図形」の概念を最も一般的に捉えるには，二次元平面 $\mathbb{R}^2$ の任意の部分集合を考えなくてはならない．

「空間図形」とは３次元空間 $\mathbb{R}^3$ の任意の部分集合のことと考える．3 次元以上の空間での図形についても同様．

一次元空間での図形の長さ，二次元空間での図形の面積，３次元空間での図形の体積 etc. は数学的には次元に依存せずに同様に扱かえる．

このようなものを測度 (measure) と総称する．

面積や体積の自然，かつ最も一般的な定式化はこのような測度の理論の基礎を築いたフランスの数学者 Henri Lebesgue(1875-1941) にちなみ Lebesgue 測度と呼ばれている．　(B)

$\mathbb{R}^n$ の部分集合の中には，集合のサイズとしては $\mathbb{R}$ 自身と同じ大きさ（つまり連続体濃度）を持つのに，測度は 0 となるようなものが存在する．

例:　カントル集合 (C)

このような例は，単に，集合の「要素の数の多さ」と「かさ」が異なることがありえることを示しているだけで，何ら矛盾ではない!

$\mathbb{R}$ の部分集合の中には測度を持たない（持ちえない）ものが存在することが示せる．

例:　Vitali 集合 (D)
バナッハ=タルスキー定理での球の分割

測度を持たない集合は非可測集合と呼ばれ，測度の考えられる集合は可測集合と呼ばれる．

どのくらい複雑な集合が非可測になりえるのか？

$\mathbb{R}^n$ の区間 $(n=2$ のときには方形 $n>2$ のときには立方体$)$ の全体から出発して，和集合，共通部分，補集合，可算個の集合の和集合と共通部分をとる，という操作を繰り返して得られる集合を，**ボレル集合**と言う．

例: $\mathbb{R}$ の開集合や閉集合はボレル集合である．カントル集合はボレル集合である．

定理 (Lusin 1917 − 大正 6 年) ボレル集合の射影として得られる集合は可測である．

ボレル集合の射影として表せる集合のことを**解析集合** (alanlytic set) と呼ぶ．ボレル集合は自分自身の射影と考えられるから射影集合でもある．実は初等的な解析学で現われる実数の集合は,（ほとんど）すべて解析集合であると言える．

解析集合の全体を現代の記法では Σ^1_1 とあらわす． Σ^1_1 集合の射影は（射影の射影は一回の射影としてあらわせるので）ふたたび Σ^1_1 集合となるが，Σ^1_1 集合の補集合の射影の形をしている集合の全体（これを Σ^1_2 とあらわす）は Σ^1_1 を真に含む集合の族となっている．

Σ^1_2 集合の可測性

定理 (Kurt Gödel, 1951 — 昭和 26 年) $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ のもとで非可測な Σ^1_2 集合が存在する．

$\mathrm{V} = \mathrm{L}$ は，構成可能性公理 (Axiom of Constructibility) と呼ばれる公理で，“すべての集合は超限帰納法によって「構成」できる” ことを主張する．
（数学の通常の公理系が矛盾を含まないなら）数学の公理系に $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ の仮定を付け加えたものも矛盾を含まない．(Kurt Gödel, 1938 — 昭和 13 年)

定理 (Wacław Sierpiński, 1925 — 大正 14 年) すべての Σ^1_2 集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合の形に表わせる．

系 (上の Sierpiński の定理と 1970 年代の結果による) 連続体仮説の否定とマルティンの公理を仮定すると，すべての Σ^1_2 集合は可測である．

（数学の通常の公理系が矛盾を含まないなら）数学の公理系に連続体仮説の否定とマルティンの公理の仮定を付け加えたものも矛盾を含まない (D.A. Martin, R. Solovay, 1970)

ゲーデルの不完全性定理

定理 (ゲーデルの第一不完全性定理, Kurt Gödel, 1931 — 昭和 6 年)
任意の（具体的に与えられ数論の体系を含む）公理系は（それが矛盾しないものなら）完全でない．つまり，この公理系で表われる概念のみを用いている主張 φ で φ も φ の否定もこの体系から証明できないようなものが存在する．

通常の数学の体系をどう拡張しても，その体系から正否の決定できない命題が必ず残ってしまう．

定理 (ゲーデルの第二不完全性定理, Kurt Gödel, 1931 — 昭和 6 年)
任意の（具体的に与えられ数論の体系を含み矛盾しない）公理系 T 対し， T が矛盾を含まないことを主張しているとみなせるような命題が，第一不完全性定理での φ のようなものになっている．
つまり，公理系 T が矛盾しないことは，その公理系自身の中では証明できない．

通常の数学の体系が矛盾を含まないことの厳密な証明は不可能である．

射影集合と巨大基数

集合論では無限集合のサイズを測る基準となる集合を（無限）基数とよぶ．可算の無限基数は自然数の全体と一致するが，これを基数として考えるときに $\aleph_0$ （アレフ・ゼロ）とあらわす．$\aleph_0$ の次の基数は $\aleph_1$ とよばれる．
同様に:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$$

このような基数をすべて超越する“大きな”基数が存在することを主張するタイプの公理は**巨大基数基数公理**とよばれる．**可測基数** (measurable cardinal) とよばれる巨大基数は，巨大基数の研究の初期の 1940 年代から色々と研究されていたものである．

定理（R. Solovay, 1969）
可測基数が存在するなら，すべての Σ^1_2 集合は可測である．

ボレル集合から出発して，射影と補集合をとる操作を繰り返すことで得られる実数の集合は**射影集合** (projective set) とよばれる．

定理 (S. Shelah and H. Woodin, 1990)
ウディン基数とよばれる基数が無限個存在するなら，すべての射影集合は可測である．

参考文献　(* 黄色の部分は講演者のコメント)

[1] 玉野研一, **なっとくする無限の話**, 講談社, (2004).　一般向けのやさしい読みもの

[2] 渕野 昌: **数学の中の無限 — 無限の中の数学** (2004)
http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/infinity-LN.pdf
予備知識はいらないように工夫したつもりではある

[3] 渕野 昌: **Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から** —, 数学, Vol.56, No.3 (2004), 248–259.　数学者向け．マルティンの公理とその一般化の解説を含む.

[4] 松原 洋, 渕野 昌 他: **ゲーデルと 20 世紀の論理学** (仮題), 第 4 巻, 東京大学出版会 to appear.　講演者の担当した章は集合論の入門書的な性格を持つテキスト.
松原の章は巨大基数の理論に関するもの.

[5] A. Kanamori: **巨大基数の集合論**, シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (渕野 昌 訳, 1998)　上級者向けの本格的な教科書

この本に関する [1] でのコメント:
“専門家以外には決して読破できないが，現代集合論の最先端の息吹が感じられる．”