数学の考え方 2007年4月25日

中部大学2007年度春学期開講

水曜 9時30分 ～ 11時00分　946教室

担当: 渕野 昌 (Sakaé Fuchino, fuchino@isc.chubu.ac.jp)

このクラスのは前回の講義から，ED と EM の２クラスに再編成されました．この教室はEMの人のクラスです．

ED学科の受講者は，小林礼人先生担当の，10号館3階1032教室の数学の考え方の講義に移動してください

数学の考え方 2007年4月25日 渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

前回: 記号と式

今回: **厳密な論証 — 証明**

数学では，主張されるすべての命題は厳密に証明される．

このことと，次を比較せよ:

— 多くの自然科学の研究では，理論の正しさを，実験によって検証する．

— コンピュータ・プログラムが正しく動作することを検証するのによく使われる方法として，極端なデータを入力して想定した動作をするかどうかを確かめてみる．

Digression（寄り道，脱線）: 数学は難しい？

（特に日本人 — または東アジア人 — が）数学が難しいと思いがちな理由:

1. 数学の記号はヨーロッパの言語からきていることが多い．
2. 「証明」や「定義」という概念は日本（東アジア）のもともとの文化に存在しない (?)
3. 絶対的な真理という概念も日本（東アジア）のもともとの文化に存在しない (?)

しかし西洋人も同じように数学が難しいと思う人が多い

数学の考え方 2007年4月25日 渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

皆さんが今習っている“数学”は面倒くさいかもしれないけれど，ぜんぜん難しくはない !!!

本当に難しい数学は，皆さんはまだ習ったことがなくて，これは本当に難しい !!!

本当に難しい数学でも，一生懸命に勉強すれば，誰でも理解することはできる（はず）.

ただし，数学の新しい理論を発明するのには才能が必要で誰でもできるわけではない.

しかし新しい理論の発明を追体験することは誰でもできるはず.

証明の例

定理 $x \in \mathbb{R}$ が，条件 $(x+7)(x+5)(x-1)x < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

証明 関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ を考える．定理は，

> $x \in \mathbb{R}$ が，$f(x) < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

と言いなおすことができる．

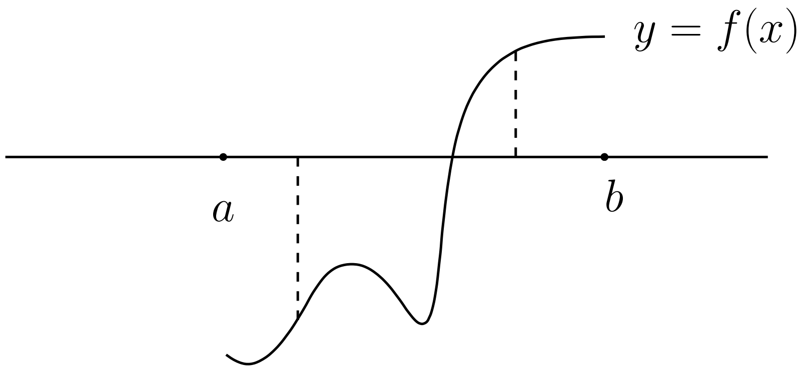
証明 関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ を考える．定理は，

> $x \in \mathbb{R}$ が，$f(x) < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つちょうどそのときである．

と言いなおすことができる．

$f(x) = 0$ となるのは，$x = -7, x = -5, x = 0, x = 1$ のどれかが成り立つときだから，区間 $(-\infty, -7), (-7, -5), (-5, 0), (0, 1), (1, \infty)$ の各々の中では $f(x)$ の値はプラスマイナスは一定である．

もし，区間 (a, b) の中で $f(x)$ がプラスの値もマイナスの値もとったとすると，$f(x)$ は連続だから，区間 (a, b) でこのプラスの値からマイナスの値のところへ変数 x が動くとき，$y = f(x)$ のグラフはどこかで x-軸を横切る．つまり (a, b) の中で $f(x) = 0$ となる点が存在しなくてはならないが，区間 $(-\infty, -7)$, $(-7, -5)$, $(-5, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ の中に $f(x) = 0$ となるような点は存在しないので，このようなことはありえない．



証明 関数 $f(x) = (x+7)(x+5)(x-1)x$ を考える．定理は，

> $x \in \mathbb{R}$ が，$f(x) < 0$ を満たすのは，$-7 < x < -5$ または $0 < x < 1$ が成り立つ<u>ちょうどそのとき</u>である．

と言いなおすことができる．

$f(x) = 0$ となるのは，$x = -7, x = -5, x = 0, x = 1$ のどれかが成り立つときだから，区間 $(-\infty, -7)$, $(-7, -5)$, $(-5, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ の各々の中では $f(x)$ の値はプラスマイナスは一定である．

これらの区間おのおのから点を1つづつとる．たとえば，-8, -6, -4, 0.5, 2 をとる（抜き取り検査）．このとき $f(-8) = 216$, $f(-6) = -42$, $f(-4) = 60$, $f(0.5) = -10.3125$, $f(2) = 126$ だから，$f(x) < 0$ の成り立つ x はちょうど区間 $(-7, -5)$ と $(0, 1)$ の要素となることがわかる．したがって定理が証明された．

数学の考え方 2007年4月25日 渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

配られた用紙に名前学籍番号を記入してください．

1. 次の主張の証明を書いてください．回りの人と相談してもいいですが，証明の文章は自分で工夫して，できるだけ分りやすいものになるように工夫してください．

$f(x)$ を連続な関数で，$f(1) = -2$, $f(3) = 1.5$ となるとする．このとき，方程式 $f(x) = 0$ は $1 < x < 3$ となるような解 x を少なくとも1つは持つ．

2. 1. ができた人は，次の問題にもチャレンジしてください: 上の主張で $f(x)$ が連続である，という条件は落すことができないことを示す例を見つけてください．なぜそれがそのような例になっているかという説明も書くこと．