数学の考え方 2007年5月2日 渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

厳密な論証 — 証明 の続き

数学では，主張されるすべての命題は厳密に証明される．

厳密な論証の必要性

— 数学は科学全体の土台になっているので，ここであやふやな議論がされたり，実は正しくない議論がされたりしていないことを十二分にチェックする必要がある．

— 直観だけでは遠くまで行けない．厳密な議論の積み重ねで，直観的な把握では不可能な複雑な理論の構築が可能になる．

— 直観的に正しいと思っても実はそれが正しくないことが厳密な論証で確かめられる場合もある．

出来上がった数学を応用するだけなら証明などなくていいのではないか?

— 数学の定理のより深い意味は実は，証明の中に表現されていることが多い.

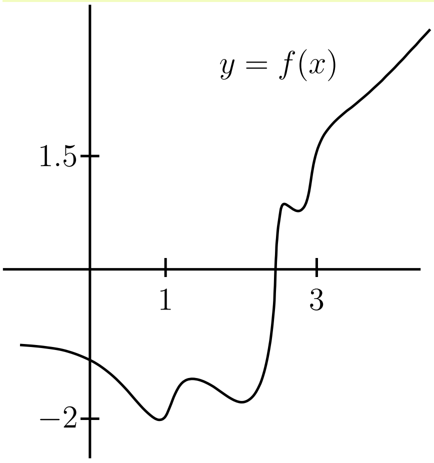
— 数学の定理で出てくる条件がどこで必要となっているかを見極めるには証明を吟味してみることが必要である.

— 数学の応用では，知られた結果を応用できる形に変形したり，改良したりする必要が頻繁におきるが，数学の結果の証明を追えていないと，そのようなことは不可能である.

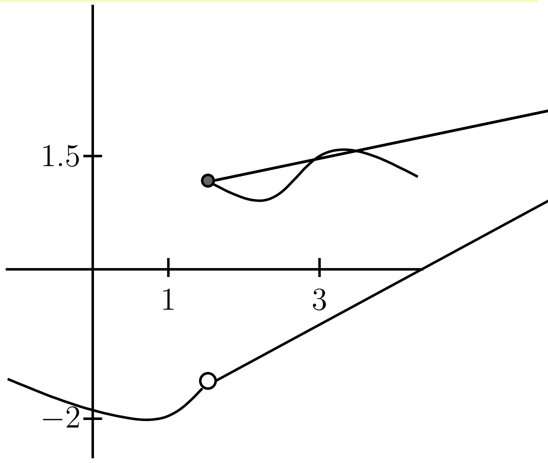
— 証明からアルゴリズム（計算法）が抽出できることも多い.

前回の演習問題：

$f(x)$ を連続な関数で，$f(1) = -2$, $f(3) = 1.5$ となるとする．このとき，方程式 $f(x) = 0$ は $1 < x < 3$ となるような解 x を少なくとも1つは持つ．



「$f(x)$ が連続」という条件は必要:



定理（中間値の定理） $f(x)$ を連続な関数として，$a, b\ (a < b)$ を区間 $[a, b]$ が $f(x)$ の定義域に含まれるような2点とする．このとき，$f(a)$, $f(b) \neq 0$ で $f(a)$ と $f(b)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a < c < b$ で $f(c) = 0$ を満たすものが存在する．

証明 たとえば $f(a) < 0 < f(b)$ とする．$a_0 = a, b_0 = b$ とする．a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる．$f(c_0) = 0$ なら，これが求めるもの．そうでなければ，$f(a_0)$ と $f(c_0)$ のプラスマイナスが異なるなら，$a_1 = a_0, b_1 = c_0$ とする．そうでなければ，$f(c_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なる．このときには，$a_1 = c_0, b_1 = b_0$ とする．

以下同様の構成を繰り返す．この構成が途中で（$f(c_n) = 0$ となる点が見つかってストップしなければ）$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots b_2 \leq b_1 \leq b_0$ となる．$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば，$f(x)$ の連続性から，$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ となるから，この c が求めるもの．

連続関数 $f(x)$ に対する方程式 $f(x)=0$ の数値解法

(1) $f(a_0)$ と $f(b_0)$ のプラスマイナスが異なるような $a_0 < b_0$ をみつける．

(2) a_0 と b_0 の中間点 c_0 をとる．$f(a_0)$ と $f(c_0)$ の符号が異なるか，$f(c_0)$ と $f(b_0)$ の符号が異なるかのどちらかである．前者なら $a_1=a_0$, $b_1=c_0$ とし，後者なら，$a_1=c_0$, $b_1=b_0$ とする．

(3) a_1 と b_1 の中間点 c_1 をとり，(2) と同様に議論して a_2, b_2 を得る．以下同様に $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ ととってゆく．

このとき a_n（あるいは b_n）は，誤差 b_n-a_n 以内での $f(c)=0$ を満たすような c の数値解となっている．

中間値の定理の証明の問題点

「$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば,」と言ったが，このような c は存在するのか?

実数体の完備性: 上のような c は常に存在する.

この性質を実数体（実数の全体の集合）の基本性質として仮定する.