

# 数学の考え方

2007年5月9日 湊野 昌 (Sakaé Fuchino)

## 前回の講義の復習と補足

定理（中間値の定理） $f(x)$  を連続な関数として、 $a, b$  ( $a < b$ ) を区間  $[a, b]$  が  $f(x)$  の定義域に含まれるような2点とする。このとき、 $f(a), f(b) \neq 0$  で  $f(a)$  と  $f(b)$  のプラスマイナスが異なるなら、 $a < c < b$  で  $f(c) = 0$  を満たすものが存在する。

関数  $f(x)$  が連続とは、 $f(x)$  の定義域の各点  $a$  で、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  が成り立つこと。

定理（中間値の定理） $f(x)$  を連続な関数として、 $a, b$  ( $a < b$ ) を区間  $[a, b]$  が  $f(x)$  の定義域に含まれるような2点とする。このとき、 $f(a), f(b) \neq 0$  で  $f(a)$  と  $f(b)$  のプラスマイナスが異なるなら、 $a < c < b$  で  $f(c) = 0$  を満たすものが存在する。

証明たとえば  $f(a) < 0 < f(b)$  とする。 $a_0 = a, b_0 = b$  とする。 $a_0$  と  $b_0$  の中間点  $c_0$  をとる。 $f(c_0) = 0$  なら、これが求めるもの。そうでなければ、 $f(a_0)$  と  $f(c_0)$  のプラスマイナスが異なるなら、 $a_1 = a_0, b_1 = c_0$  とする。そうでなければ、 $f(c_0)$  と  $f(b_0)$  のプラスマイナスが異なる。このときには、 $a_1 = c_0, b_1 = b_0$  とする。

以下同様の構成を繰り返す。この構成が途中で ( $f(c_n) = 0$  となる点が見つかってストップしなければ)  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$  となる。 $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  とすれば、 $f(x)$  の連続性から、 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$  となるから、この  $c$  が求めるもの。

# 数学の考え方

2007年5月9日 湊野 昌 (Sakaé Fuchino)

連続関数  $f(x)$  に対する方程式  $f(x) = 0$  の数値解法がこの証明から抽出できる:

(1)  $f(a_0)$  と  $f(b_0)$  のプラスマイナスが異なるような  $a_0 < b_0$  をみつける .

(2)  $a_0$  と  $b_0$  の中間点  $c_0$  をとる .  $f(a_0)$  と  $f(c_0)$  の符号が異なるか ,  $f(c_0)$  と  $f(b_0)$  の符号が異なるかのどちらかである . 前者なら  $a_1 = a_0$  ,  $b_1 = c_0$  とし , 後者なら ,  $a_1 = c_0$  ,  $b_1 = b_0$  とする .

(3)  $a_1$  と  $b_1$  の中間点  $c_1$  をとり , (2) と同様に議論して  $a_2$  ,  $b_2$  を得る . 以下同様に  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$  ととってゆく .

このとき (十分に大きな  $n$  に対し)  $c_n$  は , 誤差  $b_n - a_n$  以内での  $f(c) = 0$  を満たすような  $c$  の数値解となっている .

## アルゴリズムの実装

$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$  の数値解を求めるCプログラムの作成

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$  とすると,  $f(2.1) = -0.079$ ,  $f(3.0) = 2.0$  となるので, 方程式  $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$  は 2.1 と 3.0 の間に解を持つことがわかる.

Cプログラムを走らせると

2.100000 と 3.000000 の間にある方程式の数値解 ( の1つ ) は  $x = 2.414213$  です  
計算の誤差は  $\pm 0.000001$  未満です

という出力が得られた.

# 数学の考え方

2007年5月9日 湊野 昌 (Sakaé Fuchino)

Cプログラムを走らせると

2.100000 と 3.000000 の間にある方程式の数値解 ( の1つ ) は  $x = 2.414213$  です  
計算の誤差は  $\pm 0.000001$  未満です  
という出力が得られた .

実は ,  $x^3 - 4x^2 + 3x + 2$  は  $(x - 2)(x^2 - 2x - 1)$  と因数分解できるので ,  
 $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$  の 2.1 と 3.0 の間の解は  $1 + \sqrt{2}$  とあらわされる .

$1 + \sqrt{2}$  の電卓での計算結果: 2.414213562373095

# 数学の考え方

2007年5月9日 湊野 昌 (Sakaé Fuchino)

$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-4} = 1$  の数値解を求めるプログラム

$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-4} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{x-4} - 1 = 0$  に注意する .

$f(x) = \sqrt{x+6} - \sqrt{x-4} - 1$  とすると ,

$f(4) = \sqrt{10} - 1 > 0$ ;  $f(30) = -0.09901951359278449\dots$  となる . これを使って前のプログラムを変更して計算させると ...

4.000000 と 30.000000 の間にある方程式の数値解 ( の1つ ) は  $x = 24.249990$  です  
計算の誤差は  $\pm 0.000025$  未満です

などという結果の出力を得る .

厳密解は 24.25 ではないだろうか?

$$\sqrt{24.25+6} - \sqrt{24.25-4} - 1 = \sqrt{\frac{121}{4}} - \sqrt{\frac{81}{4}} - 1 = \frac{11}{2} - \frac{9}{2} - 1 = 0 !!$$

# 数学の考え方

2007年5月9日 湊野 昌 (Sakaé Fuchino)

$\sin 2x - x = 0$  の数値解を求めるプログラム

$f(x) = \sin 2x - x$  とすると,  $f'(x) = 2 \cos 2x - 1$  となる .

$f'(\frac{\pi}{6}) = 0, f'(-\frac{\pi}{6}) = 0$  である .

$f'(0) = 1 > 0, f'(-\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}) = -3$

また,  $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0, f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ .

$x$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

## 中間値の証明から抽出したアルゴリズムの限界

1.  $f(a)$  と  $f(b)$  の符号の違うような  $a < b$  を別途に見つけなければならない.
2. たとえば,  $f(x) = x^2$  としたときの  $f(x) = 0$  のように  $f(x) = 0$  は解を持つが  $f(x)$  の値の符号が常に一定であるような場合には, このアルゴリズムは適用できない.

上の 1. 2. のような問題点を回避できるアルゴリズムとしては  $f(x)$  だけでなく  $f'(x)$  の値も用いるニュートン法やその様々な改良などが知られている.