数学の考え方 抽象化と公理的アプローチ（その 3）

2007 年 5 月 30 日　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

群（ぐん, group）

ある集合 G の上に演算 $\circ$ が定義されていて，次の3つの性質が成り立つとき，G と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は群（ぐん）であるという:

(g1) すべての $x, y, z \in G$ に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ．
（結合法則）

(g2) $E \in G$ で，どんな $x \in G$ に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つようなものが存在する．(単位元の存在)

(g3) 上の (g2) でのような E をとるとき，どんな $x \in G$ に対しても $x \circ y = E$ となる $y \in G$ が存在する．（逆元の存在）

(g2) でのような E のことを群 $(G, \circ)$ の単位元という.
$x \in G$ に対して (g3) でのような y を x の逆元という.

定理　任意の群 $(G, \circ)$ の単位元はただ1つしか存在しない.

すべての $x, y \in G$ に対し, $x \circ y = y \circ x$ が成り立つとき, $(G, \circ)$ はアーベル群である, という.

定理　$(G, \circ)$ を群として E を $(G, \circ)$ の単位元とする. このとき次が成り立つ:
(1) $y \in G$ を $x \in G$ の逆元とするとき, $y \circ x = E$ が成り立つ.
(2) $y \in G$ を $x \in G$ の逆元とするとき, x は y の逆元である.
(3) $x \in G$ の逆元はただ1つしかない.

群の例

(1)

$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である．

$(\mathbb{R}, +)$ の単位元は 0 で，$x \in \mathbb{R}$ の逆元は $-x$ である．

(2)

$\mathbb{R}^\times = \{x : x$ は実数で $x \neq 0\}$ とするとき，$(\mathbb{R}^\times, \times)$ はアーベル群である．

$x, y, z \in \mathbb{R}^\times$ に対し，$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
すべての $x \in \mathbb{R}^\times$ に対し，$x \times 1 = 1 \times x = x$
すべての $x \in \mathbb{R}^\times$ に対し，$x \times \frac{1}{x} = 1$
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \times y = y \times x$

アーベル群でないような群の例

平面上の各点を，同じ平面の点に（何かの規則によって）移す対応 f が合同変換であるとは，任意の2点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の距離が，それらの2点の f で移した先の点 $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})$ の距離と等しいこと．特に合同変換では異なる2点の移した先は異なる2点になっている．

$G = \{f : f$ は平面上の合同変換$\}$ とする．たとえば f を x-軸方向に2平行移動する，という合同変換とすると，$f \in G$ である．

$f\ g \in G$ に対して $f \circ g$ で f と g の関数としての合成をあらわすことにする．平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ に対し $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ である．

上のような $(G, \circ)$ を平面上の合同変換群とよぶ

$G = \{f : f$ は平面上の合同変換$\}$ とする．たとえば f を x-軸方向に 2平行移動する，という合同変換とすると，$f \in G$ である．

$f\ g \in G$ に対して $f \circ g$ で f と g の関数としての合成をあらわすことにする．平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ に対し $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ である．

上のような $(G, \circ)$ を平面上の合同変換群とよぶ

上の $(G, \circ)$ は実際に群になっている:

結合法則: $f, g, h \in G$ のとき，すべての平面上の点 $\mathbf{x}$ に対し
$$((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}) = (f \circ g)(h(\mathbf{x})) = f(g(h(\mathbf{x}))) = f((g \circ h)(\mathbf{x})) = (f \circ (g \circ h))(\mathbf{x})$$

単位元: 恒等変換 — どの点もその点自身に移す（なにも移さない）

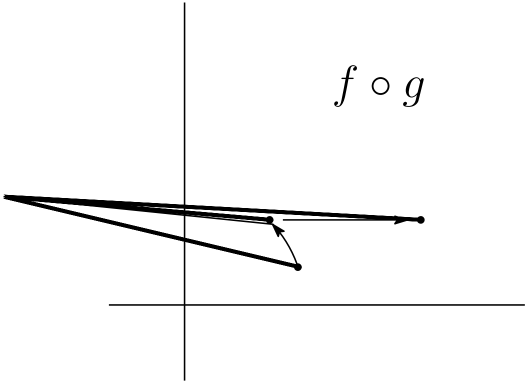
逆元: 逆変換

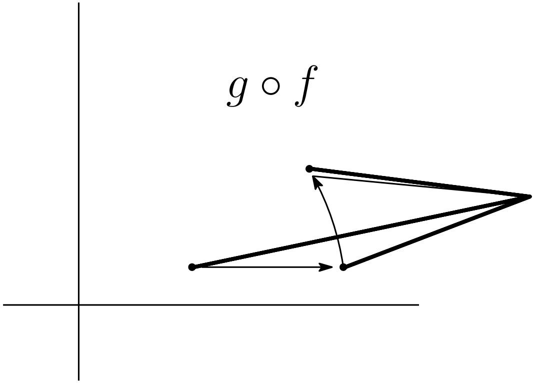
平面上の合同変換群は可換でない

例

g: 原点を中心に左回りに 30° 回転させる

f: x -軸方向に 3 平行移動する





n をある自然数として，$a_1,\ldots,a_n$ を n 個の異なる記号とする．これらの記号のならべかえの全体を $S(n)$ であらわすことにする．

たとえば，n が 4 のとき，$S(n)$ の要素の一つは

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{array}$$

とあらわせる．

$s, t \in S(n)$ のとき，$s \circ t$ で，t と s を合成して得られる並べかえをあらわすことにする

$n = 4$ の例では，たとえば s と t が

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \end{array} \quad \text{と} \quad \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \end{array}$$

のときには，$s \circ t$ は

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array} \quad \text{と合成して} \quad \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array}$$

$(S(n), \circ)$ は群になる．この群を n 次の置換群とよぶ．

$n > 2$ のとき $(S(n), \circ)$ は可換でない．

前ページの s と t を

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{array}$$

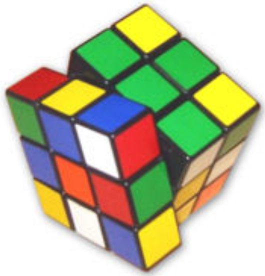
と合成すると

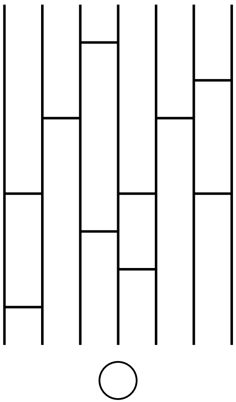
$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \end{array}$$

となり $s \circ t$ と $t \circ s$ は異なる．

置換群の応用

ルービック・キューブ





あみだくじ