

# 数学の考え方

問題の数学的な翻訳（続き）

2007年6月13日 瀧野 昌 (Sakaé Fuchino)

## ケーニッヒスベルクの橋の問題



ケーニッヒスベルクの7つの橋を  
それぞれ一回ずつ渡って歩くことはできるか？

オイラー (Leonhard Euler, 1707–1783): 7つの橋をそれぞれ一回ずつ渡って歩くことはできない (1735年 — 享保(きょうほう)20年)

# ケーニッヒスベルクの橋の問題



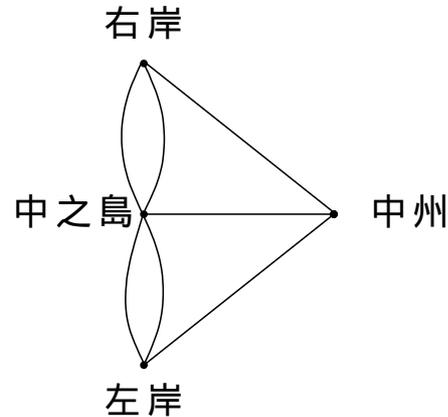
オイラー (Leonhard Euler, 1707 – 1783) はスイス人の数学者で、物理学や数学の幅広い分野で多くの業績を残した。

# 橋の問題の数学化



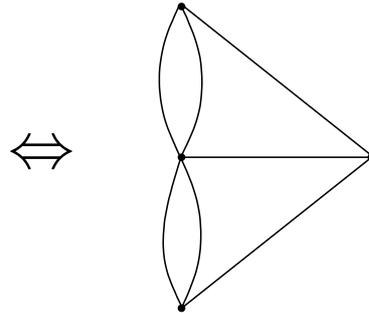
左の地図の7つの橋の部分

川の左岸と右岸，中之島と中洲をそれぞれ点で表し，それぞれの橋をこれらの点をむすぶ線で表すことにすると，次のグラフが得られる：



# 橋の問題の数学化

ケーニヒス  
ベルクの橋  
の問題



左の図(グラフ)は一筆  
書きができるか?

グラフの理論の用語から:

上のようないくつかの点を線でむすんでできる図のことをグラフとよぶ。

グラフの点のことを頂点とよび頂点を結ぶ線のことを辺とよぶ。1つの頂点につながっている辺の数を、この頂点の次数とよぶ。

# オイラーの一筆書きの定理

グラフの理論の用語の続き:

グラフの点のことを頂点とよび頂点を結ぶ線のことを辺とよぶ。1つの頂点につながっている辺の数を、この頂点の次数とぶ。

グラフ  $G$  で、どの頂点からどの頂点へも辺をたどって移動できるとき、 $G$  は連結であるという。

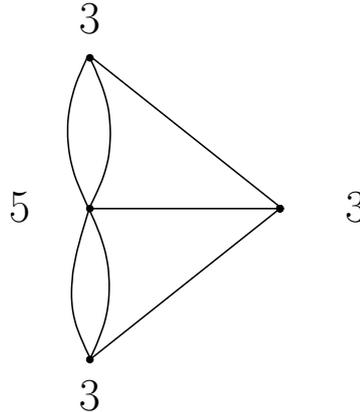
定理 (オイラーの一筆書きの定理)

連結なグラフ  $G$  が一筆書きできるのは、次の条件 (1), (2) のうちのどちらかが成り立つちょうどそのときである:

- (1) すべての頂点の次数は偶数である
- (2) 2つの頂点の次数が奇数でその他のすべての頂点の次数は偶数である

# ケーニヒスベルクの橋の問題の解

ケーニヒスベルクの橋のグラフの頂点の次数は



となるから、オイラーの一筆書きの定理により、このグラフは一筆書きできない。この結果をもとの問題に翻訳しなおすと、7つの橋をそれぞれ一回ずつ渡って歩くことはできないことがわかる。

# オイラーの一筆書きの定理の証明

つぎの2つの主張が証明できればよい。

(A) すべての連結なグラフ  $G$  について、 $G$  の一筆書きができれば、 $G$  は (1) と (2) のどちらかを満たす。

(B) すべての連結なグラフ  $G$  について、 $G$  が (1) と (2) のいずれかを満たせば  $G$  は一筆書きができる。

上の (A) は次と同じ:

(A)' すべての連結なグラフ ( $G$ ) について、 $G$  が (1) も (2) も満たさなければ、 $G$  は一筆書きできない。

注意．ケーニヒスベルクの橋の問題の解決には (A)' で十分．

# 論理に関する補足

$\alpha, \beta$  を数学的な主張 (命題) とする .

$\alpha$  と  $\beta$  が同値 (どうち) であるとは ,  $\alpha$  が成り立つのは  $\beta$  が成り立つちょうどそのときであることである . つまり ,

「 $\alpha$  なら  $\beta$ 」と「 $\beta$  なら  $\alpha$ 」の両方が成り立つことである .

「 $\alpha$  なら  $\beta$ 」は「 $\alpha \Rightarrow \beta$ 」とも書く .  $\alpha$  と  $\beta$  が同値であることは「 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ 」ともあらわす .

「 $\alpha$  なら  $\beta$ 」は , この命題の対偶命題 (たいぐうめいだい) である「 $\beta$  でない , なら  $\alpha$  でない」と同値である .

## 論理に関する補足（続き）

「 $x = y^2$  となるような  $y$  が存在しない なら  $x < 0$  である」  
の対偶命題は ...

「 $x < 0$  でない なら  $x = y^2$  となるような  $y$  が存在する」

注意．上の例での「 $x = y^2$  となるような  $y$  が存在しない なら  $x < 0$  である」という命題は， $x, y$  をどこで解釈するかによって正しくなることもあるし正しくなくなることもある．

$x$  と  $y$  を実数の全体の中で解釈するときには，この命題は正しいが， $x$  と  $y$  を整数の範囲で解釈するときには，この命題は正しくない． $x$  と  $y$  を複素数の範囲で解釈するときにも，この命題は正しくなくなる．

## 論理に関する補足（続きその2）

「なら」あるいは「ならば」は論理的な帰結を以外のことを表していることもあるが，この場合には，対偶命題が作れなかったり，作れてももとと違う意味になってしまったりする．

例．

「明日雨が降るなら傘を持ってゆく」

の「なら」は，時間の推移が入っている条件付きの意思決定を表していて論理的な帰結ではない．

「傘を持ってゆかないなら明日雨が降らない」

は上とは意味が異なる．

# オイラーの一筆書きの定理の証明

(A) の証明:  $G$  を一筆書きを持つ連結なグラフとする. 1つ一筆書きを固定して議論する. この一筆書きの始点と終点が同じ場合とそうでない場合について証明する.

一筆書きの始点と終点と同じ場合: このときには  $G$  の各頂点につながっている辺は, 一筆書きでこの頂点に入る辺とこの頂点から出る辺の組に分けることができるから, それらの数 (= この頂点の次数) は偶数である. したがって, (1) が成り立つ.

そうでない場合: このときには, 一筆書きの始点となっている頂点と終点となっている頂点が, 2つの奇数の次数を持つ頂点となり, 残りの頂点の次数は偶数になる. つまり (2) が成り立つ.

# オイラーの一筆書きの定理の証明

(B) は  $G$  の頂点の数に関する帰納法で示せる．この証明は2006年秋学期の「数学の考え方」講義録

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/method-math-WS06.pdf>

を参照．

# グラフに関連した他の応用問題 (1)

## 四色定理

出典: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

四色定理 (ししょくていり / よんしょくていり) とは、いかなる地図も、隣接する領域が異なる色になるように塗るには4色あれば十分だという定理である。但し飛び地のような領域は考えない

これは、グラフ理論において「平面グラフは4彩色可能である」ということと同値である

この問題は、グラフ理論における最も有名な未解決問題となったのであるが、1976年に ケネス・アッペル (Kenneth Appel) とウルフガング・ハーケン (Wolfgang Haken) によってコンピュータを駆使して証明された。

## グラフに関連した他の応用問題 (2)

### 巡回セールスマン問題

出典: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

巡回セールスマン問題(じゅんかい-もんだい、Traveling Salesman Problem、TSP)とは、多くの市と各市間の移動コストが与えられたとき、全ての市を一度だけ回って戻ってくるルートのうちコスト最小のものを求める問題である。この問題は、NP困難であることが知られている。

よく誤解されているが、NP困難ではあるものの巡回セールスマン問題は実質、(線形計画法と論理木を組み合わせた)分枝限定法や、(線形計画法と巡回群を組み合わせた)切除平面法により、約2000都市以内ならば普通のパーソナルコンピュータでも、およそ1日以内で厳密解を得られることが多い。