数学の考え方 数学的帰納法

2007年6月20日　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

今回から，何回かにわたって，数学で特徴的と言える，数学的帰納法，背理法，場合分け証明，といった論法を取り上げて見てゆく．まず数学的帰納法について見てみる．

数学的帰納法: ある性質 P がすべての自然数 n （$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）に対して成り立つことを示すために，

(1) P は n=0 のとき成り立つ

(2) もし n=m のときに P が成り立つなら，P は n=m+1 のときにも成り立つ

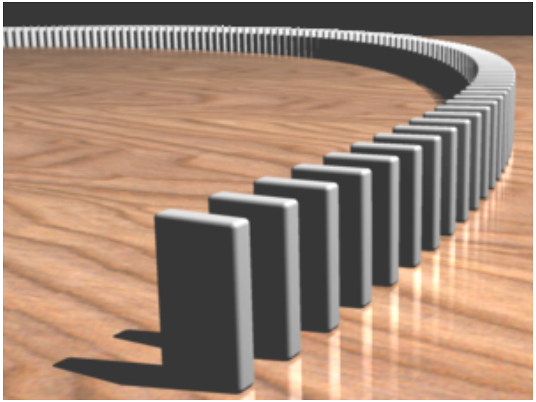
の 2 つを証明する，という論法．

数学的帰納法: ある性質 P がすべての自然数 n（$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

(1) P は n=0 のとき成り立つ（帰納法のはじめ）

(2) もし n=m のときに P が成り立つなら，P は n=m+1 のときにも成り立つ (帰納法のステップ)

の 2 つを証明する.



将棋倒し

Domino effect（ドミノ効果）

Mathematical induction

From Wikipedia, the free encyclopedia

命題. すべての自然数 n に対し，$\left(e^{2x}\right)^{(n)} = 2^n e^{2x}$ が成り立つ.

［$f^{(n)}$ で関数 f の n-階微分をあらわす，ただし $f^{(0)}$ は f 自身.］

命題の証明: n に関する帰納法による．$n = 0$ のときには，$\left(e^{2x}\right)^{(0)} = e^{2x} = 2^0 \cdot e^{2x}$ だから命題は成り立つ．**（帰納法のはじめ）**

$n = m$ のときに命題が成り立つと仮定する．つまり，等式 $\left(e^{2x}\right)^{(m)} = 2^m e^{2x}$ が成り立つと仮定する．このとき $\left(e^{2x}\right)^{(m+1)} = \left(\left(e^{2x}\right)^{(m)}\right)' = $
$= \left(2^m e^{2x}\right)' = 2^m \cdot 2e^{2x} = 2^{m+1} e^{2x}$ となるから，$n = m + 1$ に対しても等式が成り立つ．**（帰納法のステップ）**

したがって，等式 $\left(e^{2x}\right)^{(n)} = 2^n e^{2x}$ はすべての自然数 n に対し成り立つ.

（証明終り）

数学的帰納法のバリエーション（変種） その1

ある性質 P がすべての自然数 $n \geq k$ （$n = k, k+1, k+2, k+3 \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

(1) P は n=k のとき成り立つ （帰納法のはじめ）

(2) もし n=m のときに P が成り立つなら，P は n=m+1 のときにも成り立つ (帰納法のステップ)

の 2 つを証明する.

命題． すべての $n \geq 3$ に対し $n^2 > 2n$ が成り立つ.

命題の証明． $n = 3$ のときには $3^2 = 9 > 6 = 2 \cdot 3$ だから命題は成り立つ. $n = m$ のときに, 命題が成り立つ（つまり $m^2 > 2m$）と仮定すると, $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 > 2m + 2 = 2(m+1)$ となるから, $n = m+1$ のときにも命題が成り立つことがわかる. したがって, すべての $n \geq 3$ に対し $n^2 > 2n$ が成り立つ. **（証明終り）**

数学的帰納法のバリエーション（変種） その2

ある性質 P がすべての自然数 n （$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）に対して成り立つことを示すために,

(1) P は n=0 のとき成り立つ （帰納法のはじめ）

(2) もしすべてのn≤m に対して P が成り立つなら，P は n=m+1 に対しても成り立つ (帰納法のステップ)

の 2 つを証明する.

すべての自然数 n に対して,「すべての自然数 $k \leq n$ に対して命題 P が成り立つ」が成り立つことを，もとの形の帰納法で証明することを考えると，これは上の形の帰納法証明になる.

数学的帰納法の歴史

● 紀元1000年（平安時代）ごろアラビアの数学で帰納法によるとみなせる議論により初等数論の命題が証明されている．

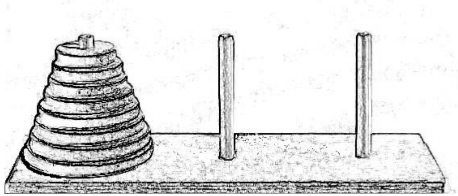
● Francesco Maurolico による Arithmeticorum libri duo (1575 –天文（てんぶん）44年（安土桃山時代）) で帰納法による厳密な論証がなされている．

● フェルマー (Pierre de Fermat フランスの数学者 1601（文禄10年）— 1665（寛文5年）) は現代的な帰納法による数論を展開している．

数学的帰納法の用例の続き: ハノイの塔

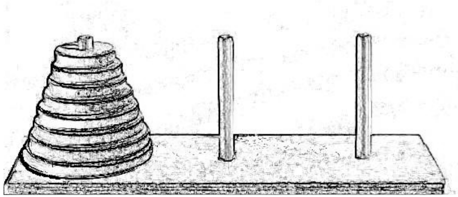
フランスの数学者ルカ (François Édouard Anatole Lucas, 1842（天保13年）–1891（明治24年）) の発明したパズル

最初に三本のポールが立った台座のうちの一本のポールに，ポールに通すためのための穴が中心に開いている，大きさの違う n 枚の円盤が，大きいほうから順につまれている（ハノイの塔）



8個の円盤を持つハノイの塔

次のルールに従ってハノイの塔を別のポールに移すことができるか?



8個の円盤を持つハノイの塔

次のルールに従ってハノイの塔を別のポールに移すことができるか?

(0.1) 一度に移動できるのは一つの円盤で，あるポールに積まれた円盤のうちの一番上のものを他のポールのどちらかに移動することができる．

(0.2) 円盤の移動先のポールは，円盤が1つも積まれていないか，すでに積まれているのは移動する円盤より大きいサイズの円盤だけのときに限る．

定理 1 すべての自然数 n について，サイズが n のゲーム盤のハノイの塔を，(0.1) と (0.2) に従って別のポールに移動することができる．

この定理は n に関する帰納法により比較的簡単に証明できる
=> 次回