数学の考え方 背理法による証明（その2）

2007年 7月 4日　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

FAQ (frequently asked question)**:**
この科目の試験は何をやるのですか? どう準備したらいいのですか?

A (answer)**:** 試験は7月18日の講義時間（9:30〜10:30）に行います．試験は「持ち込み可」です．

講義で話したことに関した問題や関連の問題が試験の内容です．

来週の講義（7月11日）の時間に，試験の “予想問題” を配ります．この予想問題の答を用意して，講義で今まで話したことを復習しておいてください．ホームページに置いてある講義のスライドや去年の講義録なども参考にしてください．

試験では，この予想問題とほぼ同一の問題 $+\alpha$ を出します．

背理法：

ある事柄 P を証明するために，P の否定を仮定すると矛盾が起きることをを示し，そのことから P を結論する．

帰謬法（きびゅうほう）ともよばれる．

定理 1（ピッパソス（?），紀元前6世紀ごろ） $\sqrt{2}$ は有理数でない．

証明. $\sqrt{2}$ **が有理数だったと仮定してみる．**

すると $\cdots$

$\cdots$

$\cdots$ **これは矛盾である．**

したがって $\sqrt{2}$ **は有理数でない．** □

自然数 (natural numbers)： $0, 1, 2, 3, \ldots$
（0を自然数に入れない流儀もある）

整数 (integers)： $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

有理数 (rational numbers)： 分数としてあらわせる数

rational: 理性的な，比として表せる

$\frac{2}{3}$, $\frac{250}{17}$, $-\frac{7}{2}$ などは有理数である．
整数は有理数である．
たとえば3は $\frac{3}{1}$ と分数であらわせる．

定理 1（ピッパソス（?），紀元前6世紀ごろ）$\sqrt{2}$ は有理数でない．

証明． **$\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定してみる．** つまり，$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ となる整数 m, n が存在すると仮定する．

$\frac{m}{n}$ は既約分数表現（これ以上約分できない表現）になっているとしてよい．(そうでなければ $\frac{m}{n}$ を約分したもので置き換える．)
$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ の両辺を二乗して移行すると，$2n^2 = m^2$ となる．このことから，m^2 は 2 で割切れることがわかるので，m も 2 で割切れる．したがって，$m = 2m'$ となる整数 m' がとれる．
$\sqrt{2} = \frac{2m'}{n}$ だから，この両辺を二乗して整理すると，$n^2 = 2m'^2$ となる．したがって，n は 2 で割切れることがわかる．したがって $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，$\frac{m}{n}$ を既約にとっていたことに**矛盾である．**

したがって，$\sqrt{2}$ は有理数でない． □

数学の考え方 **無理数の歴史**

2007年 7月 4日　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

実数（数直線上の数）で有理数でないものを**無理数 (irrational numbers)** とよぶ.

定理 1（ヒッパソス（?），紀元前6世紀ごろ） $\sqrt{2}$ は無理数である.

定理 2（ランベルト Johann Heinrich Lambert (1728–1777), 1761 (宝暦11年)） π は（e も）無理数である.

定理 3（カントル Georg Cantor (1845–1918), 1873 (明治6年)） 無理数の全体の “サイズ” は有理数の全体の “サイズ” より大きい.

定理 4（リンデマン Ferdinand von Lindemann (1852–1939), 1882 (明治15年)） π は方程式の解としてあらわせない.
e も方程式の解としてあらわせない (エルミート 1873)

数学の考え方 背理法による証明の例 (その2)

2007年7月4日　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

定理 5（ユークリッド 紀元前3世紀ごろ）素数は無限に存在する.

自然数（$0, 1, 2, 3, \ldots$）のうち，1とその数自身以外の自然数で割切れないようなものを **素数** という．たとえば $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13$ は素数だが，$8 = 2 \times 4$ だから 8 は素数でない.

証明. もし，素数が有限個しかなかったとすると，それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ として，$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数が考えられる.

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても1があまる．したがって，q 自身が素数であるか，あるいは，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれとも異なる素数で割れるが，いずれの場合も $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が素数のすべてであるという仮定に矛盾する. □