数学と無限 — 無限のパラドックス

2007年7月11日　　渕野昌（中部大学，fuchino@isc.chubu.ac.jp）

2006年12月05日（火）:静岡大学数学科にて講演

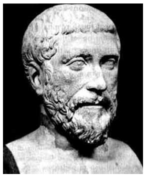
2006年12月02日（土）/ 09日（土）中部大学での2006年秋学期開講数学の考え方の補講

数学では，自然数の全体，実数の全体など無限に要素を持つ対象が積極的に考察される．無限を考察の対象として積極的に扱かうことは現代数学の一つの特徴と言ってよい．

「無限」を扱かう数学は大きな成功を収めている．その一方で，有限のアナロジー（類推）で無限を考えてゆくと，ひどく奇妙な現象があらわれることがある．それらが何を意味しているのかについて考察する．

初等数学に現れる無限

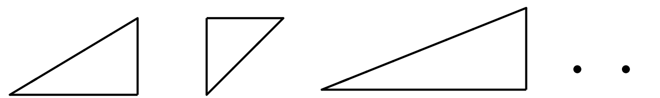
定理 1 (三平方の定理 — ピタゴラスの定理) 直角三角形の直角をはさむ二辺のそれぞれの長さの 2 乗の和は他の辺の長さの 2 乗に等しい.



ピタゴラス

紀元前569年（？）イオニアのサモス島生—紀元前475年（？）没

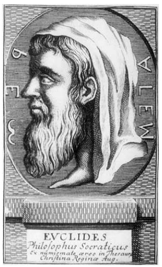
無限個の異なる直角三角形が存在する:



ピタゴラスの定理は, 無限個ある直三角形のすべてに対して「直角三角形の直角をはさむ二辺のそれぞれの長さの 2 乗の和は他の辺の長さの 2 乗に等しい」という性質が成り立つことを主張する.

初等数学に現われる無限

定理 2 (素数の存在定理 — ユークリッド)
素数は無限に存在する.



ユークリッド
（紀元前 325 年（？）生 — 紀元前 265 年（？）アレクサンドリア没）

2 以上の自然数（$2, 3, 4 \ldots$）のうち, 1 とその数自身以外の自然数で割切れないようなものを 素数 という. $2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots$ は素数だが, たとえば $8 = 2 \times 4$ だから 8 は素数でない.

初等数学に現れる無限

定理 2 (素数の存在定理 — ユークリッド)

素数は無限に存在する.

証明（背理法による）

もし，素数が有限個しかなかったとすると，それらを

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ として，

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$$

という数が考えられる.

q を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる．したがって，q 自身が素数であるか，あるいは，q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれとも異なる素数で割れるかのどちらかである．いずれの場合も $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が素数のすべてであるという仮定に矛盾する. **（証明終り）**

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？

2つの物の集まり（集合）の要素の間に一対一の対応がつくとき，これらの集合は同じ個数の要素を持つ（あるいは濃度が等しい）という．

たとえば，集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

という対応から同じ個数の要素を持つことが確かめられる．

一方，有限の個数の物のあつまりの要素は，その（真の）部分の要素とは一対一に対応づけることができない：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？

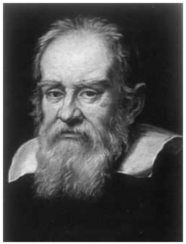
$\mathbb{N}$ で自然数の全体をあらわす． $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ である．

E を偶数の全体とする，つまり $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ である．E は $\mathbb{N}$ の真の部分だが，

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots
\end{array}
$$

という対応から同じ個数の要素を持つ（濃度が等しい）ことが確かめられる！

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？



ガリレオ・ガリレイ
（1564年ピサ（現在のイタリア）生
— 1642年フロレンス近郊（現在のイタリア）没）

ガリレオは，1638年の論文で上のような「逆理」（パラドックス）をとりあげて，『無限の大きさを比較する議論は無意味だ』と結論している．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？

ゲオルグ・カントル

1845年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918年ハレ（ドイツ）没

19世紀末には無限をより積極的に考察に取りこんだ数学の可能性や必要性がより感じられるようになった．カントルは無限に関連した研究を積極的に行い，現在では集合論と呼ばれている数学の分野を確立した．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？

ゲオルグ・カントル

1845年ペテルスブルク（現在ロシア）生

— 1918年ハレ（ドイツ）没

カントルは無限を研究することを擁護して次の言葉を残している:

『... これに対し，必要以上の研究領域の制限はより大きな危険をはらんでいるように思える．特に，この学問の本質から，そのような制限に対して何の正当性も結論できないのであるからなおさらである；つまり，数学の本質はその自由にあるからである．』

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？

ゲオルグ・カントル

1845 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918 年ハレ（ドイツ）没

上のガリレオの逆理に関しては，カントルは，全体と部分が同じ大きさになりえる，というまさにそのことが，無限の本質的な性質の１つである，と読みかえて，無限の研究をさらに進めた．

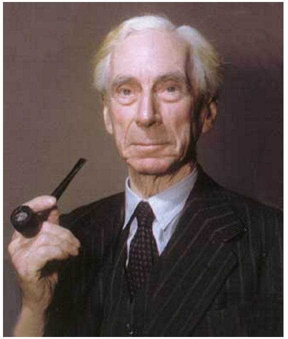
無限のパラドックス: ヒルベルトホテル

M.Aigner G.Ziegler 著: “Proofs from THE BOOK” の
K.H.Hoffmann による挿絵

無限のパラドックス: ヒルベルトホテル

ダーフィト・ヒルベルト

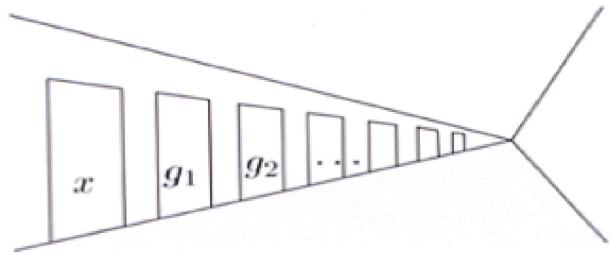
1862年ケーニヒスベルク（現在のロシア）生—1943年ゲッチンゲン（ドイツ）没



バートランド・ラッセル

1872年ウェールズ（イギリス）生—1970年ウェールズ没

無限のパラドックス: ヒルベルトホテル



無限のパラドックス: ラッセルのパラドックス

「自分自身を要素として含まない」という集合の性質を考える.
集合 x がこの性質を持つことは, $x \notin x$ という式で表現できる.
今, この性質を持つ集合を全部集めてできる集合 A を考える

$$A = \{x : x \notin x\}$$

である.
もし A が A の要素だとすると, これは $A \in A$ とあらわせる. A の定義から $A \notin A$ となり矛盾である.
もし A が A の要素でないとすると, これは $A \notin A$ とあらわせるが, このことから A の定義から $A \in A$ となってしまい, やはり矛盾である.

無限のパラドックス: ラッセルのパラドックス

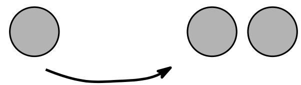
$A = \{x : x \notin x\}$ は x の範囲が限定されていないため，集合にならない．

新しい集合を作るときの作りかたをきちんと規定することで，この種のパラドックスはすべて回避できる．

→ 公理的集合論

無限のパラドックス: バナッハ=タルスキーの定理

定理（S.バナッハ，A.タルスキー， 1924 — 大正13年)
三次元空間での球の有限個の集合への分割$\mathcal{P}$で$\mathcal{P}$の要素を適当に回転，移動することで同じ半径の球2つに再構成できるようなものが存在する.



バナッハ=タルスキーの定理は，そこで存在の保証されている分割$\mathcal{P}$が物理的に実現可能なものであるとは言っていない．数学の一般性が物理的な世界での直観を越えるものだったとしても，そのことは数学が矛盾していることの証明とはならない.

数学は本当に矛盾しないのか?

初等幾何学は矛盾しない（D. ヒルベルト，P. ベルナイス）

帰納法を含まない数学は矛盾しない

（フォン・ノイマン，小野勝次 etc.）

不完全性定理（K. ゲーデル 1931）帰納法を含む数学が矛盾しないことは証明できない（ことが証明できる）.

ほとんどの数学理論は矛盾しないことが，上のゲーデルの定理の仮定している立場を弱めると証明できる

（K. ゲンツェン，竹内外史 etc. ）

実数は自然数よりずっと"たくさん"存在する

定理（G. カントル 1873（明治6年））実数の全体を自然数で数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明.（背理法で示す）そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．

たとえば，

$$
\begin{array}{rl}
1: & 2.\textcolor{red}{4}16107382550335 6\cdots \\
2: & -562.4\textcolor{red}{3}28358208955225\cdots \\
3: & 1.94\textcolor{red}{6}2686567164178\cdots \\
4: & 0.001\textcolor{red}{1}7822429 \\
5: & -1.5490\textcolor{red}{0}01 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

証明.（背理法で示す）そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．

たとえば，

$$\begin{array}{rr} 1: & 2.4161073825503356\cdots \\ 2: & -562.4328358208955225\cdots \\ 3: & 1.9462686567164178\cdots \\ 4: & 0.0011782242 9 \\ 5: & -1.5490001 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

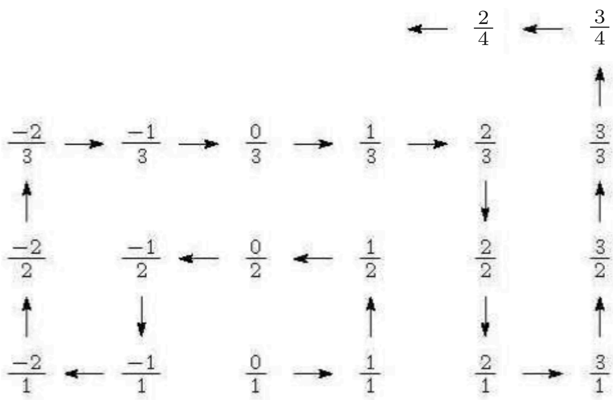
上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．

たとえば： $0.54721\cdots$

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． （証明終り）

実数は自然数よりずっと“たくさん”存在する

定理（G. カントル）有理数の全体は自然数の全体と一対一に対応づけることができる．つまり有理数の全体は自然数の全体と濃度が等しい．



実数は自然数よりずっと“たくさん”存在する

前の２つの定理を組み合せると，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができない（つまり整数の全体より実数の全体の濃度が真に大きい）ことがわかる．

（背理法による）もし，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができたとすると，このことと前の定理を組み合せて，自然数の全体を実数の全体と一対一に対応づけることができるが，これは２つ前のカントルの定理に矛盾である．

自然数の全体の濃度 = 整数の全体の濃度 < 実数の全体の濃度

自然数の全体の濃度 = 整数の全体の濃度 < 実数の全体の濃度

これらの２つの濃度（無限な集合のサイズ）の間の濃度（サイズ）を持つ集合は存在しないのではないか（カントル）?
　→　**連続体仮説**

定理（P. コーエン（1964（昭和39年））, K. ゲーデル（194?））連続体仮説は通常の数学の枠組の中では証明できないし, 否定の証明もできない. つまり連続体仮説は数学の公理系から独立である.

参考文献

[1] 渕野 昌, 数学の中の無限 (2004)
https://fuchino.ddo.jp/chubu/infinity-LN.pdf

[2] 渕野 昌, ゲーデル以降の数学と数学基礎論, 数学のたのしみ, 2006年秋号 (2006).

[3] 玉野研一, なっとくする無限の話, 講談社 (2004).

[4] このスライドの古いバージョン:
https://fuchino.ddo.jp/chubu/method-math-WS06-hoko-inf.pdf

[5] 渕野 昌, 連続体仮説とゲーデルの集合論的宇宙（ユニヴァース）現代思想, 2007年2月臨時増刊号 (2007), 94–116.