統計の手法レポート No.3 —解説と解答例

担当： 渕野 昌 (2005 年 6 月 22 日/7 月 20 日)

最終更新: 20. Juli 2006

以下は，6 月 29 日に提出してもらったレポートの解説と解答例です．この文書は

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/fuchino/chubu/statistics-06s-report03.pdf

として downloadable です．

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/fuchino/chubu/statistics-06s.html

にはこのファイルをはじめ，講義に関連する資料のリンクがあります．

---

1. 確率変数 X が $N(20,100)$ に従うとき，$P(28 \le X \le 30)$ と $P(15 \le X \le 25)$ を教科書 p 201 の数表を用いて計算してください．

$Z = \dfrac{X-20}{\sqrt{100}} = \dfrac{X-20}{10}$ とすると，Z は標準正規分布に従う．

$$28 \le X \le 30 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{28-20}{10} \le Z \le \frac{30-20}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 0.8 \le Z \le 1$$

である．教科書 p201 の標準正規分布の表から

$$P(0 \le Z \le 0.8) = 0.2881, \ \ P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$$

だから，

$$P(28 \le X \le 30) = P(0.8 \le Z \le 1) = P(0 \le Z \le 1) - P(0 \le Z \le 0.8)$$
$$= 0.3413 - 0.2881 = 0.0532$$

である．

次に，

$$15 \le X \le 25 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15-20}{10} \le Z \le \frac{25-20}{10} \quad \Leftrightarrow \quad -0.5 \le Z \le 0.5$$

である．教科書 p201 の標準正規分布の表から $P(0 \le Z \le 0.5) = 0.1915$ だから，

$$P(15 \le X \le 25) = P(-0.5 \le Z \le 0.5) = P(0 \le Z \le 0.5) + P(0 \le Z \le 0.5)$$
$$= 0.1915 \times 2 = 0.383$$

である．

2. ある中学校 1 年生男子の総数は 1200 人で，これらの生徒の平均身長は 154.3cm で，標準偏差は 8.1cm だった．この身長のデータは正規分布に従うものとすると，
(1) 身長 154.3 cm 以上の学生は何人いるでしょうか?
(2) 身長 156 cm 以上の学生は何人いますか?
(3) 生徒を身長の小さい順にならべたとき，800 人目の生徒の身長は何でしょう?

X でこれらの生徒の一人の身長を返す確率変数を表すことにする．

(1): 154.3 cm は X の平均値で，正規分布の分布関数は平均値を中心に左右対称な形をしているから，(身長がちょうど 154.3 cm の学生はいないと仮定すると) 身長が 154.3 cm 以上の学生は全体のちょうど半分，つまり 600 人いることがわかる．

(2): 仮定から，$Z = \dfrac{X-145.3}{8.1}$ は $N(0,1)$ に従う確率変数となる．

$$156 \leq X \Leftrightarrow \frac{156-154.3}{8.1} \leq Z$$

で，$\dfrac{156-154.3}{8.1} \approx 0.21$ だから，

$$P(0.21 \leq Z) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.21) \approx 0.5 - 0.0832 = 0.4168$$

が身長156 cm 以上の学生の全生徒中の割合となる．したがって，$0.4168 \times 1200 = 500.16$ から，このような学生は大体500人くらいいることがわかる．

(3): 1200 人中800人は，全体の約 0.6667 である．

$$P(Z \leq \alpha) = P(Z < 0) + P(0 \leq Z \leq \alpha) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq \alpha) = 0.6667$$

したがって，大体 $P(0 \leq Z \leq \alpha) = 0.1667$ となるような α を p.201 の数表から求めると，$\alpha = 0.43$ となる．$Z = 0.43 \Leftrightarrow X = 0.43 \times 8.1 + 154.3 \approx 157.8$ だから，800人目の生徒の身長は約 157.8cm となることがわかる．（**注意:** もとの身長のデータが小数点1桁の（つまり 1mm きざみの）精度のものとなっているので，ここでの概算値もそれに合わせたものにするべきである）

3. あるデパートの抽選では3枚に1枚の割合で当りが出るという．今この抽選を20回おこなったとき，7回かそれ以上の回数当りが出る確率を，ラプラスの定理を用いて概算してください．

X を 20回抽選を行なったとき当たりの出る回数を返す回数を与える確率変数とすると，X は $Bin(20, \frac{1}{3})$ で与えられる．したがって，ラプラスの定理により，X は近似的に $N(\frac{20}{3}, \frac{40}{9})$ に従う．Y を $N(\frac{20}{3}, \frac{40}{9})$ に従う確立変数とすると，$Z = \dfrac{Y - \frac{20}{3}}{\sqrt{\frac{40}{9}}}$ は $N(0,1)$ に従う．

$$-0.5 \leq Y \leq 7.5 \Leftrightarrow \frac{-0.5 - \frac{20}{3}}{\sqrt{\frac{40}{9}}} \leq Z \leq \frac{7.5 - \frac{20}{3}}{\sqrt{\frac{40}{9}}} \Leftrightarrow -3.399448 \leq Z \leq 0.395285$$

だから，教科書 p.201 の数表を用いて，

$$\begin{aligned}
&P(X \geq 7) = 1 - P(0 \leq X \leq 7) \approx 1 - P(-0.5 \leq Y \leq 7.5) \\
&\approx 1 - P(-3.399448 \leq Z \leq 0.395285) \\
&= 1 - (P(0 \leq Z \leq 3.399448) + P(0 \leq Z \leq 0.395285)) \\
&\approx 1 - (0.4997 + \frac{0.1517 + 0.1554}{2}) = 0.34675
\end{aligned}$$

4. ある建物の守衛室では9時から17時までの時間に，一日に平均 2.5回電話がかかってくるという．この時間帯に，この守衛室で一時間電話番のアルバイトをしたときに，(a) 一回も電話がかかってこない確率と (b) 2回以上電話がかかってくる確率をポアソン分布を用いて求めてください．

電話の回数は時間平均 $2.5/8 = 0.3125$ 回となる．したがって，一時間の間に電話が k 回かかってくる確立がポアソン分布に従うとすると，

$$P(X = k) = \frac{0.3125^k e^{-0.3125}}{k!}$$

となる．

(a): $P(X = 0) = \dfrac{0.3125^0 e^{-0.3125}}{0!} = e^{-0.3125} = 0.731616$

(b): $P(X = 1) = \dfrac{0.3125^1 e^{-0.3125}}{1!} = 0.3125 \times e^{-0.3125} = 0.228630$ だから，$P(2 \leq X) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0.731616 + 0.228630) = 0.039754$ となる．