微分積分学 I — 演習

(担当: 渕野 昌, 2006 年 10 月 16 日(月))

今日の演習では, 演習の解答用紙を授業の終りに回収します. この問題用紙の方は持ち帰って, 分らなかった問題については各自で考えてみておいてください. なお, この練習問題の解答例を次週までに,

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/uebung-06-10-16.pdf`

に掲示します.

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2 + 3x + 5$ として, $y = f(x)$ のグラフを考える.

(a) このグラフは $y = x^2$ のグラフを x-軸方向に $-\dfrac{3}{2}$ y-軸方向に $\dfrac{11}{4}$ だけ平行移動して得られるグラフになっている. これがなぜかを説明せよ.

(b) $y = f(x)$ のグラフが y-軸と交わる点の座標を求めよ.

(c) (a), (b) を用いて $y = f(x)$ のグラフの概略図を描け.

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{1}{|x-3|}$ とする. (a) $f(x)$ の定義域は何か? (b) $y = f(x)$ のグラフを描け.

$\boxed{3}$ 次の極限の値を求めよ:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^3 - 2x^2 + 4x + 5)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$ とする.

(a) $f(x)$ の定義域は何か? (b) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ が存在しないことを示せ.

$\boxed{5}$ $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 1$ とするとき, $y = f(x)$ のグラフの点 $(1, 3)$ での接線の方程式を求めよ.

$\boxed{6}$ (チャレンジ問題) a を定数とするとき, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax-4}{x^2-x-6}$ が存在するのは, $a = 4$ となるときであることを示せ.

微分積分学 I — 演習問題の略解　（担当: 渕野 昌，2006 年 10 月 16 日）

$\boxed{1}$ (a): $x^2+3x+5 = x^2+3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+5 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+5 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$ となることに注意する．

(b): $f(0)=0^2+3\cdot 0+5=5$ だから，$y=f(x)$ のグラフは $(0,5)$ で y-軸と交わることがわかる．

(c): 略．

$\boxed{2}$ (a): 3 以外のすべての実数．$\{x|x$ は実数で $x\neq 3\}$ あるいは，$\{x\in\mathbb{R}|x\neq 3\}$ あるいは，$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$ などと表すこともできる．

(b): 略．$x>3$ と $x<3$ に分けて考える．

$\boxed{3}$ (a): $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^3-2x^2+4x+5)=3^3-2\cdot 3^2+4\cdot 3+5=26.$

(b): $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

(c): $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})=1$

$\boxed{4}$ (a): 1 以外の実数すべて．(b): 略．$y=f(x)$ のグラフが $y=\dfrac{x}{|x|}$ のグラフを x-軸方向に 1 だけ平行移動して得られるものとなっていることに注意する．
(c): 1 の任意の近傍で，$x<1$ なら $f(x)=-1$ $x>1$ なら $f(x)=1$ となるから，x が 1 に近づいても $f(x)$ は一定の値に収束しない．

$\boxed{5}$ $f'(x)=5x^4+6x-2$ だから，$f'(1)=5+6-2=9$ である．したがって，$y=f(x)$ のグラフの $(1,3)$ での接線は，$y-3=9(x-1)$ であらわされる．

$\boxed{6}$ $a=4$ なら，$\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+4x-4}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{3x-2}{x-3}=\frac{8}{5}$ となるからこの極限は存在する．逆に，極限 $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax-4}{x^2-x-6}$ が存在するなら，$\displaystyle\lim_{x\to -2}(x^2-x-6)=0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to -2}(3x^2+ax-4)=0$ とならなくてはならない．したがって，$3\cdot(-2)^2+a\cdot(-2)-4=0$ が成り立つから，$a=4$ でなくてはならないことがわかる．