微分積分学 I — 演習

（担当: 渕野 昌，2006 年 10 月 17 日（火））

今日の演習では，演習の解答用紙を授業の終りに回収します．この問題用紙の方は持ち帰って，分らなかった問題については各自で考えてみておいてください．なお，この練習問題の解答例を次週までに，

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/uebung-06-10-17.pdf`

に掲示します.

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2 + 3x + 5$ とする．

(a) $f'(0)$, $f'(1)$ を求めよ．

(b) $f'(a) = 0$ となるような a を求めよ．

(c) (b) での a に対し，$y = f(x)$ のグラフでの $(a, f(a))$ での接線の方程式を求めよ．

$\boxed{2}$ a, b を定数として，$f(x) = x^5 + 3x^2 - ax + b$ とする．$f'(0) = 4$, $f(1) = 2$ のとき，a と b の値を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{2x+1}$ とする．　(a) $f(x)$ の定義域は何か?
(b) $f'(x)$ を導関数の定義による直接計算で求めよ．

$\boxed{4}$ $f(x) = x^2 + 3x + 2$ とする．実数 a で，$(a, f(a))$ での $y = f(x)$ の接線が，x 軸となす角度が 30° の右上りの直線となっているようなものを求めよ．

$\boxed{5}$ $y = 4x - x^2$ のグラフと x-軸との交点におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ．また，この曲線と接線を図示せよ．

$\boxed{6}$ （チャレンジ問題） $f(x) = |x^3|$ とするとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．$f'(x)$ の定義域は何か?

微分積分学 I — 演習問題の略解　（担当: 渕野 昌，2006 年 10 月 17 日）

$\boxed{1}$ (a): $f'(x) = 2x + 3$ だから，$f'(0) = 3$, $f(1) = 5$ となる．

(b): $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$.

(c): $f(a) = f(-\dfrac{3}{2}) = \dfrac{11}{4}$ で $f'(a) = 0$ だから，$y = \dfrac{11}{4}$ が接線の方程式となる．

$\boxed{2}$ $f'(x) = 5x^4 + 6x - a$ だから，$f'(0) = 4$ より，$a = -4$ がわかる．したがって，$f(1) = 2$ から，$1^5 + 3 \cdot 1^2 - (-4) \cdot 1 + b = 2$ を解くと $b = -6$.

$\boxed{3}$ (a): $\sqrt{\ }$ の計算が（実数の範囲で）できるためには $2x + 1 \geq 0$ とならなくてはならないから，$x \geq -\dfrac{1}{2}$, つまり，$[-\dfrac{1}{2}, \infty)$ が定義域になる．

(b): $f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2(x+h)+1) - (2x+1)}{h(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$\boxed{4}$ $f'(x) = 2x + 3$ である．接線が，x-軸となす角が $30°$ で右上り，ということから，接線の傾き係数，つまり $f'(a)$ の値は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となることがわかる．したがって，$2a + 3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を解いて，$a = \dfrac{-9 + \sqrt{3}}{6}$.

$\boxed{5}$ $4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ または $x = 4$ だから，$x = 0$ および $x = 4$ でこの曲線は x-軸と交わる．$y' = -2x + 4$ だから，$y'(0) = 4$, $y'(4) = -4$ である．したがって求める接線の方程式は，$y = 4x$ と $y = -4(x - 4)$ である．

$\boxed{6}$ $x > 0$ のときには，$f(x) = x^3$ だから，$f'(x) = 3x^2$. $x < 0$ のときには，$f(x) = -x^3$ だから，$f'(x) = -3x^2$ である．$x = 0$ のところが，この 2 つの関数の “継目” になるので,，ここで微分可能かどうかをチェックする必要がある．そのためには，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ が存在するかどうかを調べればよいが,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h^3| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot h \cdot |h|}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot |h| = 0$$

となり，この極限は存在することがわかる．したがって，

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ -3x^2 & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となり，$f'(x)$ の定義域は実数全体である．