微分積分学 I — 2006 年 10 月 24 日（火）の演習問題と解説

（担当: 渕野 昌，October 24, 2006）

この文書は

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/uebung-06-10-24.pdf`

から download 可能です.

$\boxed{\mathrm{I}}$ 次の値を求めよ.

(1) $\log_3 81$, (2) $\log_4 \sqrt{2}$, (3) $3^{\log_3 2}$, (4) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$, (5) $\log e^5$

$\boxed{\mathrm{II}}$ 次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = x^2 + \log x$ (2) $f(x) = \dfrac{1+\log x}{x}$

$\boxed{\mathrm{III}}$ 次の関数のグラフを描け.

(1) $f(x) = e^{2x+1} + 1$ (2) $f(x) = \log(x-1)$（ただし，$x > 1$）

解説と解答例

$\boxed{\mathrm{I}}$ (1): $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot \log_3 3 = 4$. (教科書 p.18 の (4) と (2) を使っている)

(2): $\log_4 \sqrt{2} = \log_4 (2)^{\frac{1}{2}} = \log_4 (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \log_4 4^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} \cdot \log_4 4 = \dfrac{1}{4}$ （(1) と同様）

(3): 関数 $\log_a x$ と関数 e^x は互いの逆関数となっているから，これらを合成すると $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$ となる．このうちの 2 番目の式により，$3^{\log_3 2} = 2$ である．

(4): 教科書 p.18 の (3) により，$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 2 \cdot 5 = \log_{10} 10 = 1$ 最後の等式は教科書 p.18 の (2) による．

(5): “log” は “$\log_e$” のことだった，したがって，問題 (3) の解説での 1 番目の式を使うと，$\log e^5 = \log_e e^5 = 5$

$\boxed{\mathrm{II}}$ (1): $f'(x) = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)' = 2x \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2\log x + 1)$ （$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ と教科書の定理 1.3 (3) を使っている）

(2): $f'(x) = \dfrac{(1+\log x)' \cdot x - \log x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$ （教科書の定理 1.3 (4) による）

$\boxed{\mathrm{III}}$ (1): $f(x) = e^{2x+1} + 1$ は $f(x) = e^{2(x+\frac{1}{2})} + 1$ と書けるから，$y = f(x)$ のグラフは $y = e^{2x} + 1$ のグラフを x 軸のマイナス方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ移動したものであることがわかる．一方 $y = e^{2x} + 1$ のグラフは，$y = e^{2x}$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られるグラフである．$y = e^{2x}$

のグラフは x 軸（つまり $y=0$ の表す直線）を漸近線として持っていたので，$y=e^{2x}+1$ のグラフでは $y=1$ の表す直線が漸近線となり，$y=e^{2x}+1$ のグラフは $x\to-\infty$ でこの直線に近づく．また $y=e^{2x}$ のグラフは，$y=e^x$ のグラフを y 軸を中心として x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ縮小して得られるグラフである．

　したがって，$y=e^x$ のグラフ (教科書 p.17 の $y=a^x$ のグラフで $a=e=2.718\cdots>1$ と置いたもの) から出発して以上の変形を逆にたどることで $y=f(x)$ のグラフが得られる．

(2): $f(x)=\log(x-1)$ のグラフ $y=f(x)$ は，$y=\log x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ（右に）平行移動して得られるグラフである．$y=\log x$ のグラフでは，x 軸と y 軸（つまり $x=0$ の表す直線）が漸近線となっていたので，$y=f(x)$ のグラフでは x-軸と $x=1$ の表す直線が漸近線となる．