微分積分学 I — 演習

（担当: 渕野 昌，2006 年 12 月 12 日（火））

演習の解答用紙のみを授業の終りに回収します．この問題用紙の方は持ち帰って，分らなかった問題については各自で考えてみておいてください．なお，この練習問題の解答例を次週までに，

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/uebung-06-12-12.pdf

に掲示します．この解答例を含めて，今までの演習問題の解答例や過去問などが:

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/

にリンクしてあります．

$\boxed{0}$ 次の不定積分を計算せよ

(a) $\displaystyle\int e^x\,dx$　　(b) $\displaystyle\int (3x^2-2x+1)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \log x\;dx$　　(d) $\displaystyle\int \sin 5x\;dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\;dx$

$\boxed{1}$ 次の不定積分を計算せよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\;dx$　　(b) $\displaystyle\int x\,\cos 2x\;dx$

(c) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$　　(d) $\displaystyle\int (3x+4)(2x+3)^{24}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \cos x\,\sin^5 x\;dx$　　(f) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-7x+12}\;dx$

$\boxed{2}$ 次の定積分の計算をせよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\;dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x\;dx$

解説と解答例

$\boxed{0}$ ：関数 $f(x)$ の不定積分は，$f(x)$ の原始関数（x に関して微分すると $f(x)$ になるような関数）$F(x)$ に不定定数を足した $F(x)+C$ という形になるのでした．このような $F(x)$ が簡単に見つかる場合には，それを使えばいいわけです．

(a): $(e^x)' = e^x$ だから $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$　　(b): $\displaystyle\int (3x^2-2x+1)\,dx = x^3 - x^2 + x + C$

(c): （部分積分法による）$\displaystyle\int \log x\ dx = \int (x)' \log x\ dx = x\log x - \int x\cdot(\log x)' dx$

$\displaystyle = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\log x - x + C$

(d): （置換積分法による）$\displaystyle\int \sin 5x\ dx = \frac{1}{5}\int 5\sin 5x\ dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

別解: 教科書での書き方では: $u = 5x$ とおくと，$du = 5dx$ だから，$dx = \dfrac{1}{5}du$ となる．

したがって，$\displaystyle\int \sin 5x\ dx = \int \sin u\ \frac{1}{5}du = -\frac{1}{5}\cos u + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

(e): $\displaystyle\int \frac{3}{x}\ dx = 3\int \frac{1}{x}\ dx = 3\log|x| + C$

$\boxed{1}$ ：(a): $2x+1 = u$ とおくと $dx = \dfrac{1}{2}du$ だから，$\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\ dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{1}{2}\log|2x+1| + C$

(b): （部分積分法 (+ 置換積分法) による）$\displaystyle\int x\,\cos 2x\ dx = \int x\,(\frac{1}{2}\sin 2x)'\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\ dx = \frac{1}{2}x\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(c): （部分積分法で計算して $\boxed{1}$ (c) を応用する）$\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx$

$\displaystyle = x(\log x)^2 - \int x\cdot(2\log x)\cdot\frac{1}{x}\ dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x dx = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$

(d): （部分積分法による）$\displaystyle\int (3x+4)(2x+3)^{24}\,dx = \int (3x+4)\left(\frac{1}{50}(2x+3)^{25}\right)'\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{50}(3x+4)(2x+3)^{25} - \int \frac{3}{50}(2x+3)^{25}\,dx = \frac{1}{50}(3x+4)(2x+3)^{25} - \frac{3}{50\cdot 26\cdot 2}(2x+3)^{26} + C$

$\displaystyle = \frac{1}{50}(3x+4)(2x+3)^{25} - \frac{3}{2600}(2x+3)^{26} + C$

(e): （置換積分法による）$\displaystyle\int \cos x\ \sin^5 x\ dx = \int (\sin x)'(\sin x)^5\,dx = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$

(f): （有理関数の積分法 — 部分分数分解による）$\displaystyle\int \frac{2}{x^2-7x+12}\ dx = \int \frac{2}{(x-3)(x-4)}\ dx = \int\left(\frac{-2}{x-3} + \frac{2}{x-4}\right)dx = 2\left(\int \frac{1}{x-4}\,dx - \int \frac{1}{x-3}\,dx\right) = 2(\log|x-4| - \log|x-3|) + C = 2\log\left|\frac{x-4}{x-3}\right| + C$

$\boxed{2}$ ：(a): $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2x + 1 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi$

別解: 教科書の例 2.34 の結果を用いて: $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\ dx = \int_0^{\pi} (1-\sin^2 x)\,dx = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$

(b): $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x\ dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$