解答例と解説

以下は，2007 年春学期開講の微分積分学 I で，7 月 3 日に行なった演習の解答例とその解説です．このファイルは，

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/uebung-07-07-03.pdf

としてダウンロードできます．このレポートの模範解答以外にも，講義に関連した教材や，過去の問題や解答例などが：

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/index.html

にリンクされています．このページのリンクは逐次更新しますのでチェックしてください．

$\boxed{0}$ （基本問題）次の不定積分を計算せよ

(a) $\displaystyle\int e^x\,dx$　　(b) $\displaystyle\int (3x^2-2x+1)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \log x\ dx$　　(d) $\displaystyle\int \sin 5x\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\ dx$

$\boxed{1}$ 次の不定積分を計算せよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\ dx$　　(b) $\displaystyle\int x\ \cos 2x\ dx$

(c) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$　　(d) $\displaystyle\int (3x+4)(2x+3)^{24}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \cos x\ \sin^5 x\ dx$　　(f) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-7x+12}\ dx$

$\boxed{2}$ 次の定積分の計算をせよ．

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\ dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin 3x\ dx$

$\boxed{3}$ 次の等式を検算せよ．

(a) $\displaystyle\int x\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{2x^2+1}{4}\log(x+\sqrt{1+x^2})+C$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx = x\tan\frac{x}{2}+C$

解説と解答例

$\boxed{0}$ ：関数 $f(x)$ の不定積分は，$f(x)$ の原始関数（x に関して微分すると $f(x)$ になるような関数）$F(x)$ に不定定数を足した $F(x)+C$ という形になるのでした．このような $F(x)$ が簡単に見つかる場合には，それを使えばいいわけです．

(a): $(e^x)' = e^x$ だから $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$　　(b): $\displaystyle\int (3x^2-2x+1)\,dx = x^3 - x^2 + x + C$

(c): （部分積分法による）$\displaystyle\int \log x\ dx = \int (x)' \log x\ dx = x\log x - \int x\cdot(\log x)' dx$

$\displaystyle = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x} dx = x\log x - x + C$

(d): （置換積分法による）$\displaystyle\int \sin 5x\ dx = \frac{1}{5}\int 5\sin 5x\ dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

別解: 教科書での書き方では: $u = 5x$ とおくと，$du = 5dx$ だから，$dx = \dfrac{1}{5}du$ となる．

したがって，$\displaystyle\int \sin 5x\ dx = \int \sin u\ \frac{1}{5}du = -\frac{1}{5}\cos u + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

(e): $\displaystyle\int \frac{3}{x}\ dx = 3\int \frac{1}{x}\ dx = 3\log|x| + C$

$\boxed{1}$ ：(a): $2x+1 = u$ とおくと $dx = \dfrac{1}{2}du$ だから，$\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\ dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{1}{2}\log|2x+1| + C$

(b): （部分積分法 (+ 置換積分法) による）$\displaystyle\int x\cos 2x\ dx = \int x\,(\frac{1}{2}\sin 2x)'\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\ dx = \frac{1}{2}x\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(c): （部分積分法で計算して $\boxed{1}$ (c) を応用する）$\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx$

$\displaystyle = x(\log x)^2 - \int x\cdot(2\log x)\cdot\frac{1}{x}\ dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x dx = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$

(d): （部分積分法による）$\displaystyle\int (3x+4)(2x+3)^{24}\,dx = \int (3x+4)\left(\frac{1}{50}(2x+3)^{25}\right)'\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{50}(3x+4)(2x+3)^{25} - \int \frac{3}{50}(2x+3)^{25}\,dx = \frac{1}{50}(3x+4)(2x+3)^{25} - \frac{3}{50\cdot 26\cdot 2}(2x+3)^{26} + C$

$\displaystyle = \frac{1}{50}(3x+4)(2x+3)^{25} - \frac{3}{2600}(2x+3)^{26} + C$

(e): （置換積分法による）$\displaystyle\int \cos x\ \sin^5 x\ dx = \int (\sin x)'(\sin x)^5\,dx = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$

(f):（有理関数の積分法）$\displaystyle\int \frac{2}{x^2-7x+12}\ dx = \int \frac{2}{(x-3)(x-4)}\ dx = \int \left(\frac{-2}{x-3} + \frac{2}{x-4}\right) dx = 2\left(\int \frac{1}{x-4}\,dx - \int \frac{1}{x-3}\,dx\right) = 2(\log|x-4| - \log|x-3|) + C = 2\log\left|\frac{x-4}{x-3}\right| + C$

$\boxed{2}$ ：(a): $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x + 1 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$

別解: 教科書の例 2.34 の結果を用いて: $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\ dx = \int_0^\pi (1-\sin^2 x)\,dx = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$

(b): $\displaystyle\int_0^\pi \sin 3x\ dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\boxed{3}$ 等式 $\displaystyle\int f(x)dx = g(x)+C$ の意味は，$g(x)$ が $f(x)$ の原始関数であること，つまり，$g'(x) = f(x)$ となることだった．したがって，この等式が成り立っていることを確かめるには，$g(x)$ の導関数を計算してそれが $f(x)$ と一致することを見ればよい．

(a): $\displaystyle\int x\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2+1}{4}\log(x+\sqrt{1+x^2}) + C$
右辺を微分すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2+1}{4}\log(x+\sqrt{1+x^2}) + C\right)' \\
&= \left(-\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2}\right)' + \left(\frac{2x^2+1}{4}\log(x+\sqrt{1+x^2})\right)' \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x \\
&\quad + \frac{2\cdot 2x}{4}\log(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{2x^2+1}{4}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{4}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x^2 \\
&\quad + x\log(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{2x^2+1}{4}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&\quad + x\log(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{2x^2+1}{4}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= -\frac{1+x^2+x^2}{4\sqrt{1+x^2}} \\
&\quad + x\log(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{2x^2+1}{4\sqrt{1+x^2}} \\
&= x\log(x+\sqrt{1+x^2})
\end{aligned}
$$

となり被積分関数[1)] と一致する．したがってこの等式が成り立つことが示せた．

(b): $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx = x\tan\frac{x}{2} + C$
右辺を微分すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(x\tan\frac{x}{2} + C\right)' = (x)'\tan\frac{x}{2} + x\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \tan\frac{x}{2} + x\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' \\
&= \tan\frac{x}{2} + \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + x}{2\cos^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \sin x
$$

また，

[1)] 積分される関数のことを “被積分関数”（ひせきぶんかんすう）とよぶことがある．これはドイツ語のちょっと古めかしい “die zu integrierende Funktion” という表現の訳であろう．

$$2\cos^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$$

だから，これらを上の式に代入すると，等式の右辺の微分が左辺の被積分関数に等しいことがわかり，等式が成り立つことが示せた．