ベクトル解析 期末試験の傾向と対策

淵野 昌

fuchino@isc.chubu.ac.jp

January 1, 2006

以下で，淵野担当のベクトル解析の期末試験の予想問題とその解説を行います.

“予想問題” とは，実際に出題した問題の類題，同様の考え方で解ける問題というほどの意味です.

まず，試験当日の試験問題と同じ書式[1]で予想問題を次のページに示します.

予想問題の後に，問題の解説つきの解答例を付けました．解答例は計算ミスがないよう注意して書いたつもりですが，もし間違えを発見した場合には，上記のアドレス宛にメールで書いて知らせてください．妥当な指摘をしてくれた人には，成績評価の際に配慮します.

[1]ただし，試験当日の問題用紙は B4 版に拡大印刷されている．また,『ただし，“公式カンニング・ペーパー” の名称で事前に配付した用紙に記入したまとめ一枚のみは持ち込み可とする』という注意書きは，当日の問題用紙では，教務課の要請があり（期末試験の要項のしばりのため）削除したが，講義で話したように，“公式カンニング・ペーパー” に自分のまとめを書いたものの当日の試験時の持ち込みは可である.

予想問題

科目名	**ベクトル解析**	担当者名	**渕野　昌**	所要時間　75 分	2006 年 1 月吉日 (金) 15:15〜16:30 施行
持込	**不可** (ただし，"公式カンニング・ペーパー"の名称で事前に配付した用紙に記入したまとめ一枚のみは持ち込み可とする)				
添付する解答用紙	1　枚配付（問題用紙の回収　要・否）		計算用紙　0　枚配付		

このテストの回答例を試験終了後に `http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/chubu/vector-ana2005w-kimatsu-x.pdf` に掲示します.

1. ベクトル場 $\mathbf{A}(x,y,z)$ とスカラー場 $\varphi(x,y,z)$ を,

$$\mathbf{A}(x,y,z) = x^2z\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k},$$
$$\varphi(x,y,z) = \cos(2x+y) + e^{x^2+z}$$

とするとき，次を求めよ:

(1) $\nabla\varphi$,　(2) $\nabla\times\mathbf{A}$,　(3) $\nabla\cdot\mathbf{A}$　(4) $\nabla^2\varphi$　(5) $\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})$

(6) φ の点 (x,y,z) における，単位ベクトル $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ の方向への方向微分係数

2. スカラー場 $\varphi(x,y,z) = xy + e^z$ において，点 $(1,1,0)$ で，この点を通る等位面（つまり $xy + e^z = 2$ を満たす点からなる曲面）に垂直な単位ベクトル（つまり法単位ベクトル）を求めよ.

3. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ として，$\mathbf{r}(t)$ により与えられる曲線について次を求めよ:

(1) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

(2) この曲線での $t=0$ から $t=1$ までの弧長

(3) $t = \dfrac{1}{2}$ での，この曲線の接単位ベクトル

(4) スカラー場 $\varphi(x,y,z) = x + y$ の，曲線 $C = \{\mathbf{r}(t)\ :\ 0 \le t \le 1\}$ にそっての積分 $\displaystyle\int_C \varphi\, dt$

4. $S = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\ :\ 2x + 3y + z = 4, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ とする.

(1) $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - 2u - 3v)\mathbf{k}$ とするとき，$\mathbf{r}(u,v)$ で移すと，ちょうど S になるような平面上の領域 D は何か?

(2) $\displaystyle\int_S (x+y+z)dS$ を求めよ.

問題の解説

1. (1) $\sim$ (4) はそれぞれ，$\nabla\varphi$, $\nabla\times\mathbf{A}$, $\nabla\cdot\mathbf{A}$, $\nabla^2\varphi$ の一般的な定義に，ここでの $\mathbf{A}$ と φ をあてはめて計算すればよい．(5) は直接計算することもできるが，$\varphi\mathbf{A}$ はかなり複雑になってしまうので，教科書 p.28 の (3) の式,

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi)\cdot A + \varphi(\nabla\cdot A)$$

を用いて，(1) と (3) の計算結果を再利用して計算する方が効率的である．
(6) は，教科書 p.23 の (4) 式により，$\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi$ を求めればよいことがわかる．(1) から

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = (-2\sin(2x+y) + 2xe^{x^2+z})\mathbf{i} - \sin(2x+y)\mathbf{j} + e^{x^2+z}\mathbf{k}$$

だから,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\Big((-2\sin(2x+y)+2xe^{x^2+z})\mathbf{i} - \sin(2x+y)\mathbf{j} + e^{x^2+z}\mathbf{k}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-3\sin(2x+y) + (2x+1)e^{x^2+z}\right)\end{aligned}$$

となる．

2. $\nabla\varphi$ の各点の値は，その点を通る等位面と垂直なベクトルとなる（教科書 p.23）．したがって，$(1,1,0)$ での $\nabla\varphi$ と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{1}{|\nabla\varphi|}\nabla\varphi$ の値が求めるものである．

$$\begin{aligned}&\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k},\\ &|\nabla\varphi| = \sqrt{y^2+x^2+e^{2z}}\end{aligned}$$

だから,

$$\frac{1}{|\nabla\varphi|}\nabla\varphi = \frac{y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}}{\sqrt{y^2+x^2+e^{2z}}}$$

である．ここで，x, y, z にそれぞれ 1, 1, 0 を代入して，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ を得る.（$e^0=1$ に注意.）

3. (1) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dfrac{d}{dt}2t)\mathbf{i} + (\dfrac{d}{dt}t)\mathbf{j} + (\dfrac{d}{dt}3t^2)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$
(2) 弧長を s であらわすと，教科書 p.37 の (1) 式を用いて,

$$s = \int_0^1 \sqrt{2^2+1^2+(6t)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{5+36t^2}\,dt$$

(3) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ の各 t での値が $\mathbf{r}(t)$ の接ベクトルを与えるから，$\dfrac{1}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ の $t=\dfrac{1}{2}$ での値が $t=\dfrac{1}{2}$ でのこの曲線の接単位ベクトルとなる．

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{2^2+1^2+(6t)^2} = \sqrt{5+36t^2}$$

だから,

$$\frac{1}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+6t\mathbf{k}}{\sqrt{5+36t^2}}$$

である．これに $t=\dfrac{1}{2}$ を代入して，$\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ を得る．

(4) 線積分の定義（教科書 p.40 の (1) ）から

$$\int_C \varphi \; dt = \int_0^1 \varphi(\mathbf{r}(t)) \; dt = \int_0^1 (2t+t)dt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

4. (x,y,z) を S に含まれる点とするとき，x, y, z は

(a) $2x+3y+z=4$,

(b) $x \geq 0$,

(c) $y \geq 0$,

(d) $z \geq 0$

を満たす．(a) と (d) から，$2x+3y \leq 4$ となるが，これと (b), (c), また，$\mathbf{r}(u,v)$ の x-座標と y-座標がそれぞれ u と v になっていることに注意すると，

$$D = \{(u,v) \mid u \geq 0, v \geq 0, 2u+3v \leq 4\}$$

と定義される uv-平面上の直角三角形の領域 D を $\mathbf{r}(u,v)$ で移したときに S となることがわかる．

(2)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i}-2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j}-3\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}, \qquad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$$

に注意すると，(1) の結果と教科書 p.46 の式 (15) により，

$$\int_S (x+y+z)dS = \int_D (u+v+(4-2u-3v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \; dudv = \sqrt{14}\int_D (4-u-2v) \; dudv$$
$$= \sqrt{14}\int_0^{\frac{4}{3}} \left(\int_0^{2-\frac{3}{2}v} (4-u-2v) \; du\right) dv = \quad \cdots$$

として計算できる．ただし上の最後の変形は，領域 D の点 (u,v) で v のとり得る値は 0 から $\dfrac{4}{3}$ までで，区間 $[0,\dfrac{4}{3}]$ で v を固定したとき，u のとり得る値は 0 から $2-\dfrac{3}{2}v$ であることによる（微分積分学の教科書の “重積分” の章を参照）．