非可測集合は存在するのか？

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

00.12.05(火) (21.02.07(日 17:45(JST)) 微少な加筆／修正)

And the ice and the upper radiance of snow are brilliant with timeless immunity from the flux and the warmth of life. Overhead they transcend all life, all the soft, moist fire of the blood. So that a man must need live under the radiance of his own negation.

— *D.H. Lawrence, Twilight in Italy (1916)*

以下のテキストは，北海道大学大学院理学研究科における 2000 年 10 月 10 日の講演のためのノートに基づくものである．

この文章は集合論の非専門家を読者として想定している．そのため，集合論の特別な知識は仮定せずに読めるような記述になるよう試みたつもりである．いくつかの結果は証明なしに引用したが，詳細については，[4] を参照されたい．

末尾に挙げた参考文献のうち [5] は集合論の最近の動向に関する，やはり集合論の非専門家むけの解説である．また [2] は,「高校生にもよく分る」というよく分からないスタンスで書いた連続体問題の解説である．

参考文献の [1] では解析学の専門家の視点からの測度の問題に関連する議論がなされている．本稿の執筆の動機の１つは，[1] で述べらてれいた,「選択公理を捨てて決定性の公理の下での解析学やソロベイのモデルでの解析学がどういうものになるかを調べてみる」というプログラムに対する alternative な視点を与えることであった.「射影的集合の世界での解析学」（これは $\mathcal{H}(\aleph_1)$ で定義可能な構造における解析学と言い換えてもよい）という集合論版の逆数学と言えるような枠組で考えることで，選択公理を放棄することなく，しかも，PD （第 3 節後半を参照）を仮定すれば非可測集合の存在しない楽園での解析学を，決定性の公理の下での解析学やソロベイモデルでの解析学をある意味で内包する形で，展開できるではないか，というのがその趣旨であるが，このような考えを支持すると考えられる射影的集合に関連したいくつかの結果について第 3 節で触れることになる．

1 Vitali 集合

$[0,1]=\{r\in\mathbb{R}: 0\leq r\leq 1\}$ として，$\mathcal{P}([0,1])$ で $[0,1]$ 上の巾集合，つまり $[0,1]$ の部分集合の全体からなる集合をあらわす．$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}([0,1])$ が $[0,1]$ 上の σ**-代数**であるとは，$\emptyset\in\mathcal{B}$ で，$\mathcal{B}$ は 可算な集合族の和集合をとる演算と 補集合をとる演算に関して閉じていること

である．ボレル集合の全体からなる集合は，開集合をすべて含む $[0,1]$ 上の σ-代数のうち $\subseteq$ に関して最小のものとなっている．$\mathcal{P}([0,1])$ は $[0,1]$ 上の σ-代数のうち $\subseteq$ に関して最大のものである．

$\mathcal{B}$ が $[0,1]$ 上の σ-代数のとき，$\nu : \mathcal{B} \to [0,1]$ が測度であるとは，

(1) $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu([0,1]) = 1$;

(2) 任意の $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$ に対し，
$X_m \cap X_n = \emptyset$ が異なる $m,\ n \in \omega$ に対しつねに成り立つなら，$\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(X_n)$ となる

が成り立つこととする — (2) では $\mathcal{B}$ が σ-代数であることから，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathcal{B}$ となっていることに注意する．

$X \subseteq \mathbb{R}$ と $r \in \mathbb{R}$ に対し，X の r による translation $X + r$ を $X + r = \{s + r : s \in X\}$ により定義する．σ-代数 $\mathcal{B}$ が，translation に関して閉じているとき，つまり $X \in \mathcal{B}$ で $r \in \mathbb{R}$ なら，常に $(X + r) \cap [0,1] \in \mathcal{B}$ となるとき，$\mathcal{B}$ 上の測度 ν が translation invariant とは，

(3) 任意の $X \in \mathcal{B}$ と $r \in \mathbb{R}$ に対し，$X + r \subseteq [0,1]$ なら $\nu(X) = \nu(X + r)$ となる

こととする．

定理 1 (G. Vitali, 1905) $\mathcal{P}([0,1])$ 上の *translation invariant* な測度は存在しない．

証明． $\mathcal{P}([0,1])$ 上の translation invariant な測度 ν が存在したとして矛盾を導く．$X \subseteq [0,1]$ を

(a) すべて互いに異なる $r,\ s \in X$ に対し，$r - s$ は無理数

となり，X は (a) を満たすような $[0,1]$ の部分集合のうち "$\subseteq$" に関し極大になっているとする，つまり，

(b) 任意の $r \in ([0,1] \setminus X)$ に対し，$s \in X$ で $r - s$ が有理数になるようなものが存在する

が成り立つとする．$\nu(X) = t$ とする．

Claim 1.1 (i) すべての互いに異なる $q, q' \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ に対し，$(X + q) \cap (X + q') = \emptyset$.
(ii) すべての $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ に対し，$t - |q| \leq \nu((X + q) \cap [0,1]) \leq t$.
(iii) $[0,1] = \bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (X + q) \cap [0,1]$.

$\vdash$ (i): $r \in (X + q) \cap (X + q')$ とすると，ある $s \in X$ に対し $r = s + q$ となり，ある $s' \in X$ に対し，$r = s' + q'$ となる．したがって $s + q = s' + q'$ となるから，$s - s' = q' - q$ である．この等式の右辺は有理数だから (a) により，$s = s'$ でなくてはならない．したがって，$q = q'$ となるが，これは仮定に矛盾する．

(ii): ν は translation invariant だから，例えば $q > 0$ として，$t - q \leq \nu(X \cap [0, 1 - q]) = \nu((X + q) \cap [0,1]) \leq \nu(x) = t$ となる．

(iii): $r \in [0,1]$ とすれば，(b) により，$r \in X$ となるか，または $s \in X$ で，$q = s - r$ が有理数になるものが存在する．後者の場合には $-q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ で，$r \in (X - q) \cap [0,1]$ となる． ⊣ (Claim 1.1)

$[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ は可算だから，上の Claim と測度の定義の (2) により，

$$\mu([0,1]) = \mu(\bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (X+q) \cap [0,1]) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu((X+q) \cap [0,1])$$

となるが，この等式の値を u とすれば，Claim 1.1 (ii) により，

$$\sum_{q \in [0,1]} (t \dot{-} |q|) \leq u \leq \sum_{q \in [0,1]} t$$

となるから，u は，$t = 0$ のときには 0 となり，$t \neq 0$ のときには ∞ となる．これは測度の定義の (1) に矛盾である． ❑ (定理 1)

系 2 ルベーク可測でない集合が存在する．特にルベーク測度 μ から出発して 定理 1 の証明でのように構成して得られる集合 X はルベーク可測でない．

証明． ルベーク可測集合 $\subseteq \mathbb{R}$ の全体の上で定義されたルベーク測度はルベーク可測な集合の全体の上の translation invariant な測度となっているから，定理 1 が適用できる．

❑ (系 2)

定理 1 の証明では，(a) と (b) を満たすような $X \subseteq [0,1]$ を構成するために選択公理が用いられていた．例えば $\subseteq$ に関する Zorn の lemma により証明の細部を埋めることができる．実は，選択公理の帰結の１つである $\mathbb{R}$ の整列可能性の仮定のみから，定理 1 の証明でのような非可測集合 X を構成することができる： 今 $[0,1]$ が r_α, $\alpha < \kappa$ と整列されているとする．κ は基数であるとしてよい．このとき，$s_\beta \in [0,1]$, $X_\beta \subseteq [0,1]$, $\beta < \kappa$ を帰納的に次のように定義する．

(0) $X_0 = \emptyset$;

(1) $\alpha < \kappa$ で すべての $r \in X_\alpha$ に対し，$r - r_\alpha$ が無理数になるようなものがあれば，α_β をこのようなもののうち最小のものとして，$s_\beta = r_{\alpha_\beta}$ とする．このようなものが存在しなければ，$s_\beta = r_0$;

(2) $X_{\beta+1} = X_\beta \cup \{s_\beta\}$;

(3) $\gamma < \kappa$ が極限順序数のときには，$X_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} X_\beta$.

ここで $X = \bigcup_{\beta<\kappa} X_\beta$ とすれば，X は (a), (b) を満たす．

Vitali の定理の以上のような検証から，次のような自然な疑問がわく：

(イ) $\mathbb{R}$ の整列可能性を仮定しなかったときにも Vitali の定理は成り立つのか？

(ロ) Vitali の証明で得られる非可測集合 X は実数の全体の整列可能性の仮定を用いている，という点で非構成的に得られたものとなっているが，非可測性を得るためには，実際にはどのくらい複雑な実数の集合を考えなくてはならないのか？ 特に，解析学での自然な構成法のみから非可測集合が作られてしまうことはあるのか？

(ハ) Vitali の結果での translation invariance を条件から除いたときには，すべての実数の集合に対して測度を定義することは可能か？[1]

以下では上の３つの問に対して現在までに得られている答とそれに関連した結果および未解決問題などを，順に見てゆくことにする．

2　すべての実数の集合が可測となるモデル

この節では，問題 (イ) に関連した結果について述べる．

結論を先に言ってしまうと，$\mathbb{R}$ の整列可能性を仮定しないときには，すべての実数の集合が可測でありえる．ただし，これを言うためには，実は普通の集合論の範囲での議論では不十分で，集合論のある本質的な拡張を考える必要がある．

まず，結果を述べるのに必要な概念を説明する．κ を非可算な基数とする（たとえば連続体の濃度はこのような基数の１つである）．κ が**到達不可能基数** (inaccessible cadinal) であるとは，

(1) κ は正則基数である．つまり $\lambda < \kappa$ と κ より小さな基数の列 κ_α, $\alpha < \lambda$ で $\lim_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \kappa$ となるようなものは存在しない．

(2) κ は極限基数である．つまり任意の基数 λ に対し λ^+ で λ の次の基数をあらわすことにすると，すべての $\lambda < \kappa$ に対し，$\lambda^+ < \kappa$ が成り立つ．

(3) 任意の基数 λ に対し，2^λ で λ の巾集合の濃度をあらわすことにすると，$\lambda < \kappa$ なら $2^\lambda < \kappa$ である．

実は $\lambda^+ \leq 2^\lambda$ により，(2) は (3) から導くことができる．κ を到達不可能基数とすると，$\aleph_0 < \kappa$ だから，(3) により，$2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, 2^{2^{2^{\aleph_0}}}, \cdots < \kappa$ となっている．特に連続体の濃度は $2^{\aleph_0}$ だから，κ は連続体の濃度より “ずっと” 大きいことがわかる．

IC で，“到達不可能基数が少なくとも１つ存在する” という命題をあらわすことにする．ZF で選択公理以外の集合論の公理を集めた公理系をあらわすことにして，ZFC で ZF に選択公理を加えた公理系をあらわすことにする．

IC は ZFC から導くことはできない： κ を最小の到達不可能基数とすると，rank が κ 未満の集合を全部集めて得られる集合 V_κ は ZFC + ¬IC のモデルになってしまうからである．さらに，ZFC + IC は，ZFC より矛盾を含む可能性が真に大きなものとなっている： ZFC + IC を仮定すると，V_κ が ZFC のモデルとなるから，“ZFC は無矛盾である” という命題が ZFC + IC のもとで証明できてしまうからである．一方，ゲーデルの第二不完全性定理により[2]，ZFC が無矛盾であるかぎり，ZFC から ZFC 自身の無矛盾性は証明できないのだった．

[1](ロ) と関連した問題と (ハ) に関連した問題が，私の現在の研究のレパートリーの中に含まれている．(ロ) に関連した問題に関する研究ではまだ具体的な結果には至っていないが，(ハ) に関連した研究では Saharon Shelah と共著の論文 [3] を執筆中であり，これは年内に仕上げたいと思っている．

[2]第二不完全性定理は，T が（矛盾を含まない）初等算術を含む具体的に与えられた理論のとき，T の中で T の無矛盾性を証明できない，ということを主張するものである．

このような状況は "ZFC + IC は ZFC より無矛盾性の強さ (consistency strength) が真に大きい" とも言いあらわされる[3]．

理論 ZFC + IC での無矛盾性の強さに関する状況をより明確にするために，ここでの状況を，ZFC + CH でのそれと比べてみることにする．ここに CH は連続体仮説をあらわす．CH は ZFC から証明できないことが P. Cohen の結果により知られているから，ZFC + CH は ZFC より強い理論になっている（つまり ZFC では証明できないが，ZFC + CH では証明できるような命題 — 例えば CH 自身 — が存在する）．しかし ZFC + CH で ZFC の無矛盾性を証明することはできない： Gödel の定理により，ZFC が無矛盾であることを仮定すると，ZFC + CH も無矛盾であることが証明できるのであった．このことから，もし，ZFC + CH で ZFC の無矛盾性を証明することができたとすると，ZFC + CH で ZFC + CH 自身の無矛盾性が証明できてしまうことになるが，第 2 不完全性定理により，これは矛盾である．

定理 3 (R. Solovay, 1970) ZFC + IC が無矛盾なら，ZF + "すべての実数の集合はルベーク可測である" を満たすようなモデルを構成することができる．

実は上の Solovay の結果の証明で構成されたモデルは次のような弱い形の選択公理も満たす：

(DC) $<$ を集合 S 上の半順序とし，S は $<$ に関する極大元を持たないとする．このとき，S の元の $<$ に関する無限上昇列 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ が存在する．

したがって，定理 3 は，

> ZFC + IC が無矛盾なら，ZF + DC + "すべての実数の集合はルベーク可測である" を満たすようなモデルを構成することができる．

というふうに拡張することができる．実はここでは「ZFC + IC が無矛盾」という仮定からは IC を取り除くことはできないことが知られている．

定理 4 (S. Shelah, 1984) ZF + "すべての実数の集合はルベーク可測である" を仮定すると，構成可能集合の全体からなるクラス L で[4]もとの $\aleph_1$ は到達不可能基数となる．

---

[3] この表現は実際の状況と抵触する言い回しとなっている．内容的にはむしろ「矛盾性の強さ」と言うべきあろう．

[4] L は以下のようにしてすべての順序数 α （つまり $\alpha \in On$）に対して帰納的に定義される L_α を用いて $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$ として定義される：

$L_0 = \emptyset$; $L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup \{x \subseteq L_\alpha : x$ は $\langle L_\alpha, \in \rangle$ で L_α の元をパラメタとして用いて定義可能 $\}$; 極限基数 δ に対し，$L_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} L_\alpha$.

L は ZFC のモデルになる．注意深い読者は，この主張から，ZFC の無矛盾性が証明できて，不完全性定理により ZFC の矛盾が帰結されてしまうのではないかと心配するかもしれない．しかし，ここで "L は ZFC のモデルになる" というのは，

(*) ZFC に含まれる命題 φ をひとつとってきたとき，"φ は L で成り立つ" ということを主張する命題 $\tilde{\varphi}$ が ZFC で証明できる

という主張のことである．これに対して，たとえば，到達不可能基数 κ に対して "V_κ が ZFC のモデルになる" と言ったときの正確な意味は，集合論の中での命題の（無限）集合 ZFC について，"$\forall \varphi \in \mathtt{ZFC}\,(V_\kappa$ は φ を満たす$)$" という主張となっている．L は順序数をすべて含んでおり，したがって真のクラスとなっているので，集合論

もし L で集合の全体のクラス V での $\kappa = \aleph_1$ が到達不可能基数になるとすれば，L の中で V_κ を作るとこれは ZFC のモデルとなる．したがって，このことから ZFC の無矛盾性が示せる．つまり，もし ZF + “すべての実数の集合はルベーク可測である” の無矛盾性が ZFC で示せたとすれば，定理 4 により，ZFC から ZFC の無矛盾性が示せてしまうことになる．これは第二不完全性定理に矛盾である．

定理 3 と 定理 4 により，ZFC + IC の無矛盾性を仮定すると，ZF + DC + “すべての実数の集合はルベーク可測である” の矛盾性が示せ，この逆も言える．

T, T' を 2 つの理論として，T の無矛盾性を仮定すると，それから T' の無矛盾性を導くことができ，逆も言えるとき，T と T' は**無矛盾等価** (**equiconsistent**) である言う．この用語によると，ZFC + IC と ZF + DC + “すべての実数の集合はルベーク可測である” は無矛盾等価であることが示せるわけである．

決定性の公理

“すべての実数の集合はルベーク可測である” という命題が帰結できるような集合論の公理（の候補）として知られているものに**決定性の公理** (**Axiom of Determinacy**) がある．決定性の公理は次に述べるような無限ゲームでの必勝法の存在を主張する公理となっている．${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ で集合 $\{f : f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ を表すことにする．$A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ に対し，プレイヤー I と II の間で戦われる無限ゲーム $G(A)$ を次のようなものとする．$G(A)$ のゲームでは，I と II は交互に $\mathbb{N}$ の元 $x(0), x(1), x(2), \ldots$ を選んでゆく．

$$\begin{array}{llllll} I : & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ II : & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

無限回のプレイの後 $x(0), x(1), \ldots$ によって決まる関数 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ n \mapsto x(n)$ が得られるが，$x \in A$ のときには I の勝ち，そうでないときには II の勝ちとする．**決定の性公理** (AD) は次の命題である：

(AD)　すべての $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ に対し，I か II のどちらかは無限ゲーム $G(A)$ で必勝法を持つ．

定理 5 (J. Mycielski and S. Swierczkowski, 1964) AD を仮定するとすべての実数の集合はルベーク可測となる．

AD はゲームでの必勝法の存在に関する命題の形をとっているので自然な公理のように見えるが，そこで存在の主張されている必勝法は非構成的に与えられているだけであり，その点では，選択公理での選択関数は非構成的に存在が保証されているだけなため何か釈然としない，というのと同質の問題をかかえている（後で見るように無矛盾性の強さが大

の中での命題の集合に対してその要素をすべて L が満たすというような主張をあらわす集合論の論理式は存在しない．

順序数をすべて含んでいて推移的で（つまり任意の x に対し，x を要素として含んでいれば x のすべての元も要素として含むという性質を満たしている） (*) を満たすようなクラスは ZFC の**内部モデル** (**inner model**) と呼ばれる．ZF の内部モデルも同様に定義される．

Solovay の定理 3 の証明は ZFC + IC が無矛盾なら，ZFC のモデル M で， M の ZF 内部モデルで “すべての実数の集合はルベーク可測” を満たすものが存在するようなものがとれることを示している．実は，ここでの M は後で述べる，すべての射影的集合のルベーク可測性を満たすような ZFC のモデルとなっている．

きい分だけ AD の方がもっとたちが悪いとも言える）．AD は選択公理と矛盾する．つまり，ZFC では AD は成り立たないことが示せる（ZFC で対角線論法により AD の反例となるような $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ を構成することができる.）.

ZF + AD から大きな巨大基数を持つ ZFC のモデルが構成されることは早くから知られていたので，巨大基数の存在に関する仮定で ZF + AD のモデルを与えるような仮定は何になるかが集合論の中心的な問題の 1 つと考えられたが，これは 90 年代初頭に H. Woodin により解決されている.

定理 6 (H. Woodin) 次の理論は無矛盾等価である：
(a)　ZFC + 無限個のウディン基数が存在する.
(b)　ZF + AD.

ここではウディン基数の定義や，より細かい議論を与える余裕はないが，これにについては [4] を参照されたい．“無限個のウディン基数が存在する” という仮定は，IC に比べると無矛盾性の強さはずっと大きいが超コンパクト基数の存在など，現代の集合論で考察される大きな巨大基数の仮定よりは弱い無矛盾性の強さを持つものになっている.

3　射影的集合

第 1 節で見たように，選択公理を仮定した場合，Vitali の定理により非可測集合は存在する．しかし，Vitali の定理の証明の非可測集合の構成は，実数上に存在することが選択公理によって保証された整列順序を用いる，というきわめて非構成的なものであった．それではある意味で構成的とみなせるような実数の集合で非可測なものは存在するのか，という自然な疑問がわいてくる．もし，ある意味で構成的な実数の集合からなる十分に大きなクラスについてその元がすべて可測である，という主張が成り立つとすると，そのことから，解析学的に自然な集合を扱っている限り非可測集合が現れることはない，ということの保証が得られることになる．このために，まず**射影的集合** (**projective sets**) について復習をしておく.

$n \geq 1$ に対し，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ が**解析集合** (**analytic set**) であるとは，あるボレル集合 $\tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，X は $\tilde{X}$ の第 1 ∼ 第 n 要素への射影になっていること，つまり，$X = p(\tilde{X})$ $(= \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle :$ ある $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ に対し $\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \tilde{X}$ となる $\})$ となることとする.

命題 7
(a)　$X \subseteq \mathbb{R}^n$ が解析集合となるのは，X がボレル集合の連続写像による像となるちょうどそのときである.
(b)　(Suslin, 1917) すべてのボレル集合は解析集合である．解析集合でボレル集合ではないものが存在する.
(c)　(Luzin, 1917) すべての解析集合はルベーク可測である.

解析集合の射影は再び解析集合となることがわかるが，解析集合の補集合の射影は解析集合のクラスを真に含む実数の集合のクラスを与える．一般に，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ を解析集合の全体から

なるクラスとし，$1 \le k$ に関する帰納法により，

$$\mathbf{\Pi}^1_k = \{X : \text{ある } n \in \mathbf{N} \text{ に対し，} \quad X \subseteq \mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n \setminus X \in \mathbf{\Sigma}^1_k\},$$

$$\mathbf{\Sigma}^1_{k+1} = \{X : \text{ある } n \in \mathbf{N} \text{ に対し } X \subseteq \mathbf{R}^n,\ \text{ある } \tilde{X} \in \mathbf{\Pi}^1_n \text{ に対し } X = p(\tilde{X})\}$$

とする．また，

$$\mathbf{\Delta}^1_k = \mathbf{\Sigma}^1_k \cap \mathbf{\Pi}^1_k$$

とする．このとき次が成り立つ．

命題 8
(a)　(Suslin, 1917) $\mathbf{\Delta}^1_1$ はボレル集合全体のクラスと一致する．
(b)　すべての $1 \le k$ に対し，$\mathbf{\Delta}^1_k \subsetneq \mathbf{\Sigma}^1_k$, $\mathbf{\Delta}^1_k \subsetneq \mathbf{\Pi}^1_k$, $\mathbf{\Sigma}^1_k \subsetneq \mathbf{\Delta}^1_{k+1}$, $\mathbf{\Pi}^1_k \subsetneq \mathbf{\Delta}^1_{k+1}$ が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & & & \mathbf{\Sigma}^1_k & & \mathbf{\Sigma}^1_{k+1} & \\ \text{Borel} = \mathbf{\Delta}^1_1 & & \mathbf{\Delta}^1_2 & & \mathbf{\Delta}^1_3 & \cdots & \mathbf{\Delta}^1_k & & \mathbf{\Delta}^1_{k+1} & & \cdots \\ & \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_2 & & & & \mathbf{\Pi}^1_k & & \mathbf{\Pi}^1_{k+1} & \end{array}$$

$X \subseteq \mathbf{R}^n$ が射影的であるというのは，ある $k \ge 1$ に対し，$X \in \Sigma^1_k$ となることとする．射影的集合の構成法から，解析学で具体的に与えられるものとして現れる実数の集合（あるいはもっと一般的にある $n \ge 1$ に対する $\mathbf{R}^n$ の部分集合）はすべて射影的集合のクラス，ないしは，射影的集合のクラスを含む最小の σ-代数に属すと考えてよさそうである — 実際には解析学に現れる集合のほとんどは $\mathbf{\Delta}^1_3$ に既に含まれていることが知られている．

そこで，“ある意味で構成的な実数の集合” を射影的集合（あるいは射影的集合のクラスを含む最小の σ-代数に属す集合）と解釈すると，第 1 節の問題 (ロ) は，

射影的集合で非可測なものは存在するか？

という形で述べることができる．命題 7 により，非可測な射影的集合は存在するとすれば，射影的集合の階層で $\mathbf{\Delta}^1_2$ より上のものでなければならない．

実は，問題 (ロ) の答は ZFC の中では確定しない．つまり，「射影的集合で非可測なものが存在する」という命題は ZFC と独立であることが知られている．

定理 9 (K. Gödel, 1938)　$V = L$ （すべての集合は構成的である）を仮定すると，$\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合で，非可測なものが存在する．

証明．　$V = L$ を仮定すると $\mathbf{R}$ 上の順序型が ω_1 の整列順序で $\mathbf{R}^2$ の部分集合として見たとき $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合となるものが存在する．フビニの定理により，もしこの集合が可測とすると，この集合も，この集合の $\mathbf{R}^2$ での補集合も測度 0 となるが，このことから $\mathbf{R}^2$ の測度も 0 であることが帰結されてしまい，矛盾である．　❑ (定理 9)

一方，定理 3 の証明では実は ZF + DC + “すべての実数の集合はルベーク可測” の成り立つモデルを構成する過程で，ZFC + “すべての射影的集合はルベーク可測” の成り立つモデルが構成されていた，したがって，

定理 10 (R. Solovay, 1970) ZFC + IC が無矛盾なら，ZFC + “すべての射影的集合はルベーク可測である” を満たすようなモデルを構成することができる．

上の結果での Solovay のモデルは連続体仮説も満たすものになっていたが，ここでの証明に少し変更を加えると，同じ仮定から，ZFC + ¬CH + “すべての射影的集合はルベーク可測である” のモデルを構成することもできる．言い換えると “すべての射影的集合はルベーク可測である” という命題からは連続体の大きさは決定できない．

一方，到達不可能基数よりずっと大きな — つまり，その存在の仮定がずっと大きな無矛盾性の強さを持つような — 巨大基数の存在を仮定すると，そのことから，すべての射影的集合のルベーク可測性が帰結できる：

定理 11 (S. Shelah and H. Woodin, 1990) 超コンパクト基数が存在するなら，すべての射影的集合はルベーク可測である．

上の結果での超コンパクト基数の存在は，後に，H. Woodin により，定理 6 でも現れた “無限個のウディン基数が存在する” という，これより無矛盾性の強さのずっと弱い仮定で置き換えられている．

“すべての射影的集合はルベーク可測である” という命題は，AD を弱めた**射影的決定性**と呼ばれる次の命題から導くことができる，${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ は $\mathbf{N}$ 上の離散位相の積位相によって位相空間と見なせるが，この位相に関して ${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ は $\mathbf{R}$ の零集合を除いて $\mathbf{R}$ と位相同型になる．したがって，この位相同型による翻訳により，${}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ の射影的部分集合を考えることができる．

(PD)　すべての射影的な $A \subseteq {}^{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ に対し，I か II のどちらかは無限ゲーム $G(A)$ で必勝法を持つ．

命題 12 PD を仮定する．このとき，
(a)　すべての射影的集合はルベーク可測である．
(b)　すべての射影的集合は可算であるか完全集合を部分集合として含む．

命題 12 により次の結果は定理 11 を改良するものとなっている：

定理 13 (D. Martin and J. Steel, 1989) 無限個のウディン基数が存在するなら PD が成り立つ．

この定理は ZFC でのものであり，特に PD は選択公理と矛盾しないことがわかる．定理 11 や 定理 13 は無矛盾性の結果ではなく，巨大基数の存在を仮定すると，射影的集合の可測性や PD が本当に成り立つ，と主張していることにあらためて注意しておく．連続体の上はるかかなたに超越性を持ってそそり立っているこれらの巨大基数が，連続体の性質にこのような決定的な影響を与えるというのは非常に不思議な気がする．

無限個のウディン基数の存在からは連続体の大きさは全く決定されないから，PD からも連続体の大きさは決定されない．しかし，命題 12, (b) により，PD のもとでは，すべての射影的集合は，可算であるか，あるいは濃度 $2^{\aleph_0}$ を持つかのいずれかとなる．

4　実数値可測性

“ルベーク測度を拡張する（必ずしも translation invariant でない） $\mathcal{P}([0,1])$ 上の測度が存在する” という命題も ZFC と独立である．簡単のために，以下ではこの命題を，RM と略すことにする（RM は real-valued measurability の略である）．

連続体濃度が小さいときには，$\mathcal{P}(\mathbf{R})$ 上のこのような測度は存在しない．

定理 14 (Ulam, 1930)
(a)　$\mathcal{P}([0,1])$ 上の測度が存在するなら，$\mathcal{P}([0,1])$ 上の測度でルベーク測度を拡張するようなのものが存在する．
(b)　$\mathcal{P}([0,1])$ 上の測度が存在するなら，連続体濃度は最初の正則な極限基数より大きい．

特に連続体仮説（$2^{\aleph_0} = \aleph_1$）が成り立つとき，あるいは $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ のときには，$\mathcal{P}(\mathbf{R})$ 上の測度は存在しない．

定理 14,(b) は，その後さらに改良されている．

RM の無矛盾性を示すためには，第 2 節と第 3 節での到達不可能基数よりさらに大きな（しかしやはり第 2 節と第 3 節で定義を与えずに引用したウディン基数よりはずっと小さな）可測基数と呼ばれる基数の存在の仮定が必要となる．

κ を基数として，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ が κ 上の超フィルターであるとは，

(1)　$\kappa \in \mathcal{F}$; $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
(2)　$X, Y \in \mathcal{F}$ なら，$X \cap Y \in \mathcal{F}$;
(3)　$X \in \mathcal{F}$ で $X \subseteq Y \subseteq \kappa$ なら，$Y \in \mathcal{F}$;
(4)　すべての $X \in \mathcal{P}(\kappa)$ に対し，$X \in \mathcal{F}$, または $\kappa \setminus X \in \mathcal{F}$ のどちらかが成り立つ．

κ 上の超フィルター $\mathcal{F}$ が κ-完備であるとは,

(5)　任意の $\lambda < \kappa$ と $\mathcal{F}$ の元の列 X_α, $\alpha < \lambda$ に対し，$\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{F}$ となること．

以上の準備により可測基数を次のように定義する：基数 κ が**可測基数** (**measurable cardinal**) であるとは，κ 上に κ-完備な超フィルターが存在することである．

κ が可測基数なら κ の下には無限個の到達不可能基数が存在する．このことから，第 2 節の初めと同様の議論により，可測基数の存在は到達不可能基数の存在より無矛盾性の強さが本質的に大きいことが分る．“可測基数が少なくとも 1 つ存在する” という命題を MC と略すことにする．このとき，次の結果が知られている：

定理 15 (R. Solovay, 1971)
(1)　ZFC + MC が無矛盾なら，ZFC + RM のモデルが存在する．
(2)　ZFC + RM を仮定すると ZFC の内部モデルで MC を満たすものが存在する．

定理 15 により，ZFC + MC と ZFC + RM は無矛盾等価であることがわかる．可測基数 κ の定義はそれ自身 κ 上の 2 値測度の存在を主張するものとなっているので，ZFC + MC と ZFC + RM は無矛盾等価性の結果は “さもありなん” という印象を与えるかもしれない．しかし，可測基数は，ある性質を満たす集合のユニヴァースのそれ自身への自明でな

い初等的埋め込みの存在によっても特徴付けできる．この特徴付けにより可測基数の存在の意味は集合論的に議論のできるものとなっていることに注意しておきたい．

定理 15 (1) でのモデルは RM の標準的なモデルであるが，[3] では，このモデルと本質的に違う RM のモデルは存在するか？ という D. Fremlin の問題に答えて RM の成立するような幾つかの新しいモデルが与えられている．

参考文献

[1] 新井仁之，**解析学の展望**，数学のたのしみ，No.19 (2000), 53–67.

[2] 渕野 昌，**ヒルベルト 23 の問題・第 1 問題 — 連続体仮説**, 数学セミナー，vol.37, no.5 (1998), 50–53.

[3] S. Fuchino, Noam Greenberg, and S. Shelah, Models of real-valued measurability, Annals of Pure and Applied Logic Vol.142, No.1-3 (2006), 380–397.

[4] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer–Verlag (1994/1997).
（A. カナモリ著，渕野 昌 訳，**巨大基数の集合論**，シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998), I – VI, 1 – 554）

[5] 松原 洋，**Non-stationary ideal と universe of sets**, 数学 51-1,(1999), 18–33.