$<\kappa$-strategically closed な強制概念で保存される $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の部分集合の強い stationarity について

Sakaé Fuchino (渕野 昌, 中部大学)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

September 19, 2005 日本数学会 秋季総合分科会における講演

* ここで述べる結果の一部は **Greg Piper** (Kobe Univ.) との共同研究により得られたものである.

** この dvi file は http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/ から downloadable (にする予定) である.

Closed unbounded sets と stationary sets

κ を正則基数とする．

$C \subseteq \kappa$ が closed unbounded (club) とは，

(1) $\forall \alpha < \kappa$ (α is a limit and $C \cap \alpha$ is cofinal in $\alpha \Rightarrow \alpha \in C$)

(2) $\forall \alpha < \kappa\ \exists \beta \in C$ ($\alpha \le \beta$) となること．

$S \subseteq \kappa$ が (κ で) **stationary** とは，$\forall C_{\mathrm{club}} \subseteq \kappa\ (S \cap C \neq \emptyset)$ となること．

$\kappa \le \lambda$ とするとき，$\mathcal{P}_\kappa \lambda = [\lambda]^{<\kappa} = \{\mathrm{x} \in \mathcal{P}(\lambda) : |\mathrm{x}| < \kappa\}$ とする．

$C \subseteq \mathcal{P}_\kappa \lambda$ が closed unbounded (club) とは，

(1) $\forall \mu < \kappa\ \forall \langle x_\alpha : \alpha < \mu \rangle \in {}^{\mu}C$

($\langle x_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ は $\subseteq$ に関する上昇列 $\Rightarrow \bigcup \{x_\alpha : \alpha < \mu\} \in C$)

(2) $\forall x \in \mathcal{P}_\kappa \lambda\ \exists y \in C$ ($x \subseteq y$) となること．

$S \subseteq \mathcal{P}_\kappa \lambda$ が ($\mathcal{P}_\kappa \lambda$ で) **stationary** とは，$\forall C_{\mathrm{club}} \subseteq \mathcal{P}_\kappa \lambda\ (S \cap C \neq \emptyset)$.

設 問

S を（κ での，または，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ での） stationary set として，$\mathbb{P}$ を強制概念とする．

$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary" となるのはどんなときか?

Stationary sets の定義から，この問題は，

$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists C$ (C は club で S の補集合に含まれる)"
となららないのはどんなときか?

とも言い換えられる．

文 献

[1] S.F., Greg Piper, **Destructibility of stationary subsets of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$**, to appear in Mathematical Logic Quarterly (2005).

[2] S.F., **A stronger version of stationarity preserved under $<\kappa$-strategically closed forcing**, 中部大学工学部紀要, submitted.

κ-strategically closed な強制概念

強制概念 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ が **κ-strategically closed** であるとは，Player Nonempty が次のような無限ゲーム $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{\kappa}(\mathbb{P})$ で必勝法を持つこととする:

Empty	p_0	p_2	$\ldots$		$p_{\delta+1}$	$\ldots$
Nonempty	p_1	p_3	$\ldots$	p_δ	$p_{\delta+2}$	$\ldots$

δ: limit

ここに，$\langle p_\alpha : \alpha < \eta \leq \kappa \rangle$ は $\mathbb{P}$ での $\leq_{\mathbb{P}}$ に関する下降列で，

Nonempty が勝つ $\Leftrightarrow$ すべての $\alpha < \kappa$ に対し p_α がとれる．

とする．

$\mathbb{P}$ は **$<\kappa$-strategically closed** $\Leftrightarrow$ すべての $\lambda < \kappa$ に対し，$\mathbb{P}$ は λ-strategically closed.

$\mathbb{P}$ は $<\kappa$-closed な稠密部分集合を持つ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ は κ-strategically closed $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ は $<\kappa$-strategically closed.

Stationarity の保存に関する既知の結果

定理 1 (Folklore?) (a) κ を正則基数とするとき，$S \subseteq \kappa$ が stationary で $\mathbb{P}$ が κ-strategically closed なら，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary".

(b) $S \subseteq \mathcal{P}_{\omega_1}\lambda$ が stationary で $\mathbb{P}$ が ω_1-strategically closed なら，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary".

定理 2 (T. Usuba 200?) $\kappa < \lambda$ を正則基数として，κ は $\lambda^{<\kappa}$-supercompact とする．このとき，stationary な $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ と κ-strategically closed で κ^+-c.c. を満たす $\mathbb{P}$ で，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary でない" となるようなものが存在する．

定理 1 (a) の証明のスケッチ

証明のスケッチ． σ を $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{\kappa}(\mathbb{P})$ での Nonempty の strategy とする．$p \in \mathbb{P}$ として $\underset{\sim}{C}$ を κ の club subset の $\mathbb{P}$-name とするとき，$q \leq_{\mathbb{P}} p$ で
$q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$S \cap \underset{\sim}{C} \neq \emptyset$" となるものがあることを示せばよい．

θ を十分に大きくとり，$M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，後で必要になるものをすべて含み，$M \cap \kappa \in S$ となるようにとる（S は stationary だから可能）．

$\delta = M \cap \kappa$ とする．

$\mathbb{P} \cap M$ の要素の p からの下降列 $\langle p_\xi : \xi < \delta \rangle$ で，Nonempty が σ を用いて戦っているゲームになっているようなもので， $\underset{\sim}{C} \cap \delta$ が δ で unbounded であることを gradually に force するものをとる．

σ が winning strategy だから $q \in \mathbb{P}$ で $q \leq_{\mathbb{P}} p_\xi$, $\xi < \delta$ となるものがとれるが，$q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\delta \in S \cap \underset{\sim}{C}$" である．

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の internally approachabe filter

$M \prec \mathcal{H}(\theta)$ が (strongly) internally approachable (以下 (s.)i.a. と略) $\Leftrightarrow$ M の elementary submodels の上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ で次を満たすものが存在する: (1) $M = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha$; (2) $\forall \gamma < \delta \ \ \langle M_\alpha : \alpha < \gamma \rangle \in M_\gamma$;
$\Big((3)\ \forall \gamma < \delta \ \ \mathcal{P}(\gamma) \in M_\gamma \Big)$.

$a \in \mathcal{H}(\theta)$ に対し,

$$S_\kappa^{\mathrm{IA},\theta,a}\lambda = \{\lambda \cap M : M \prec \mathcal{H}(\theta),\ M \text{ は i.a.},\ \kappa, \lambda, a \in M,\ |M| < \kappa\}.$$

$\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda = \{S_\kappa^{\mathrm{IA},\theta,a}\lambda : \theta$ 十分に大, $a \in \mathcal{H}(\theta)\}$ から生成される $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の filter

$S_\kappa^{\mathrm{SIA},\theta,a}\lambda$, $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{SIA}}\lambda$: 上の $S_\kappa^{\mathrm{IA},\theta,a}\lambda$, $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda$ の定義で i.a. を s.i.a. で置換えたもの

補題 3. $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda$ ($\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{SIA}}\lambda$) は normal filter である．特に，すべての $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し，X は$\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda$-stationary ($\Leftrightarrow$ $X \in \big((\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda)^*\big)^+$) $\Rightarrow$ X は stationary.

Strategically closed な強制概念で保存される $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary sets

定理 4. (S.F. and G.Piper [1]) $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda$-stationary なら，すべての κ-strategically closed な強制概念 $\mathbb{P}$ に対し，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{IA}}\lambda$-stationary" である．

定理 5. (S.F. [2]) κ が inaccessible で $S \subseteq \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \cap \kappa$ は regular cardinal でない$\}$ が $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{SIA}}\lambda$-stationary なら，すべての $<\kappa$-strategically closed な強制概念 $\mathbb{P}$ に対し，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{SIA}}\lambda$-stationary" である．

定理 6. (S.F. and G.Piper [1]) 上の2定理で，"$(<)\kappa$-strategically closed" は "$\mathbb{P}$ does not add any new element of $\mathcal{P}_\kappa\lambda + \kappa^+$-c.c. には弱められない．