非可測集合は定義できるか？

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/

July 12, 2005 名古屋大学における数学基礎論セミナーでの一般講演

定理 (Giuseppe Vitali, 1905 – 明治38年) μ を $\mathbb{R}$ 上の translation invariant な測度とするとき，μ に関して非可測な集合が存在する．

証明． X を区間 $[0,1]$ の部分集合で，
(a) 任意の異なる $x, y \in X$ に対し，$x - y$ は無理数で，
(b) X はそのような集合のうち $\subseteq$ に関して極大なもの

とする．特に，どんな $z \in [0,1] - X$ をとってきても，$z - x$ が有理数になるような $x \in X$ が存在する．このような X が非可測となることを示す:

有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対し，$\mathrm{X + q = \{x + q : x \in X\}}$ とする．つまり $X + q$ は X を q だけ平行移動して得られる集合である．(a) から，異なる $q, q' \in \mathbb{Q}$ に対し，$X + q$ と $X + q'$ は共通部分を持たない．

一方 (b) から，$\mathrm{Y = \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} X + q}$ は $[0,1]$ を覆い $[-1,2]$ の部分集合となっている．$[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ は可算だから，もし $\mu(X)$ が存在すれば，$\mu(Y)$ も存在するが，$\mu(X) = 0$ なら $\mu(Y) = 0$ となり矛盾．$\mu(X) > 0$ なら $\mu(Y) = \infty$ となり矛盾である．

$\square$

“通常の” 数学的な構成法のみによって得ることのできる集合で，非可測なものは存在するのだろうか？

ボレル集合 (Borel sets) とは，開集合から出発して，“通常の” 集合算と可算和の操作によって得られる集合のことだった．ボレル集合の射影として得られる集合を，解析集合 (analytic sets) とよぶ．特にすべてのボレル集合は解析集合である．解析集合の射影はふたたび解析集合となるが，解析集合の補集合の射影の全体は解析集合を真に含む集合族となっている．この集合族に含まれる集合を $\mathbf{\Sigma}^1_2$-集合 とよぶ．

定理 (Nikolai N. Luzin 1917 – 大正6年) 解析集合はすべて可測である．

$\mathrm{V} = \mathrm{L}$: すべての集合は，超限帰納法により “構成的に” 得られる．

集合論の公理系 (ZFC) が矛盾しないなら，ZFC $+ V = L$ も矛盾しない (Gödel).

定理 (Kurt Gödel, 1951 – 昭和26年) $V = L$ なら，非可測な $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合が存在する．

定理 (Wacław Sierpiński, 1925 – 大正 14 年) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は $\aleph_1$ 個のボレル集合の和集合の形に表わせる.

$\aleph_1$: 最小の非可算基数.

$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$: c.c.c. を満たす（i.e. 互いに素な開部分集合の族は常に可算となる）すべてのコンパクト・ハウスドルフ空間 $X = (X, \mathcal{O})$ に対し，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ が X の稠密開集合の濃度 $\leq \aleph_1$ の族なら，$\bigcap_{D \in \mathcal{F}} D \neq \emptyset$.　(MA for Martin's Axiom)

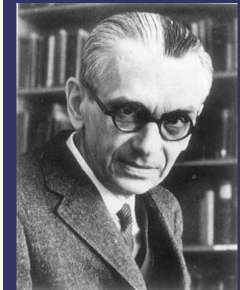
ZFC が矛盾しないなら，ZFC + $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ も矛盾しない.

定理 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ を仮定すると，$\aleph_1$ 個の可測集合の和集合は可測である.

系 (D.A. Martin and R. Solovay 1970 – 昭和 45 年) $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ を仮定すると，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は可測である.

"すべての Σ^1_2 集合は可測である" の真偽は，集合論から（したがって通常の数学的手段からでは）決定できない
"すべての Σ^1_2 集合は可測である" は ZFC から独立である．

Cf. "すべての直線 ℓ とその直線上にない一点 P に対し，P を通る ℓ と平行な直線がただ1つ存在する"（平行線公理）の真偽は，初等幾何学の他の公理から決定できない！ しかし，初等幾何学の（平行線公理を含む）公理系からは，すべての初等幾何学の命題の真偽が決定できる (A. Tarski).



K. Gödel (1906–78)

定理 (ゲーデルの第一不完全性定理, Kurt Gödel, 1931 – 昭和6年)
任意の（具体的に与えられた，初等数論の体系を含む）公理系は,（それが矛盾しないものなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを用いている主張 φ で，φ も φ の否定もこの体系から証明できないようなものが存在する．

ボレル集合から出発して，射影と補集合をとる操作を繰り返すことで得られる（$\mathbb{R}^n$ の部分）集合は **射影集合 (projective sets)** と呼ばれる．

$$\text{ボレル集合の全体} \subsetneq \text{解析集合の全体} \subsetneq \mathbf{\Sigma}^1_2\text{-集合の全体} \subsetneq \text{射影集合の全体}$$

$\mathcal{H}(\aleph_1)$: 要素も，要素の要素も，要素の要素の要素も，...すべて可算集合になるような (hereditary countable な) 集合の全体． $\mathbb{R}^n \subseteq \mathcal{H}(\aleph_1)$ である．

定理 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が射影集合であることと，次は同値である: ある論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ と $a \in \mathbb{R}$ で，

$$X = \{r \in \mathcal{H}(\aleph_1) \ : \ (\mathcal{H}(\aleph_1), \in) \models \varphi(r, a)\}$$

となるものが存在する．つまり，X は $\mathcal{H}(\aleph_1)$ で $\varphi(x, a)$ を満たすような $\mathcal{H}(\aleph_1)$ の要素の全体となっている． — X は $(\mathcal{H}(\aleph_1), \in)$ で $\varphi(x, a)$ によって定義可能．

定理 ZFC が無矛盾なら，ZFC + “すべての射影集合は可測” も矛盾を含まない．

上の“定理” は，この形では厳密には正しくない !!!

定理 (ゲーデルの第二不完全性定理, 1931 – 昭和6年) T を任意の（具体的に与えられた，初等数論の体系を含む）公理系とするとき，T での数論により“公理系 T からの $\exists x(x \neq x)$ の証明は存在しない” という主張を数論的命題: $Consis(T)$ としてコードできる．T が矛盾しないなら，$Consis(T)$ は T から証明できないし，その否定も証明できない．

上のような理論 T と T を拡張するような理論 $\tilde{T}$ があったとき，$\tilde{T}$ から $Consis(T)$ が証明できるとすると，$\tilde{T}$ は T を含むだけでなく，第二不完全性定理の意味で，T より矛盾に近い，したがってその分だけ本質的に強い理論になっていると考えられる．このようなとき $\tilde{T}$ は T より無矛盾性の強さ (consistency strength) が大きいという．

例 T を初等数論，$\tilde{T}$ を ZFC とするとき，$\tilde{T}$ では，T のモデルが存在するから，$\tilde{T}$ での完全性定理から，$Consis(T)$ が $\tilde{T}$ で証明できる．したがって $\tilde{T}$ は T より無矛盾性の強さが大きい．

ある性質 P を持つ基数 κ について V_κ が ZFC のモデルとなることが ZFC で証明できるとき，“性質 P を持つ基数 κ が存在する” という主張を ZFC に加えたものから $Consis(\mathrm{ZFC})$ が証明できる．したがって，この ZFC の拡張は ZFC より無矛盾性の強さが大きい．このような κ は巨大基数と呼ばれる．
知られている巨大基数の殆どすべては，無矛盾性の強さ（および，それぞれの種類のうちの最小のものの大きさ）に関して線型に並べられる．その一部は:

$$\text{到達不可能基数} \lll \text{弱コンパクト基数} \lll \text{ウディン基数} \lll \text{超コンパクト基数}$$

集合論の universe の open endedness を強調する立場からは，すべての巨大基数の公理は，それが自然なものであるかぎり，“正しいことが望ましい” と言える．

2つの理論 T, T' は $Consis(T) \leftrightarrow Consis(T')$ が（たとえば $T \cap T'$ で）証明されるとき，無矛盾等価 (equi-consistent) であるという．

定理 (R.Solovay (1970), S.Shelah (1984)) 以下は無矛盾等価である:
(a) ZFC + “到達不可能基数が存在する”.
(b) ZFC + “すべての射影集合は可測である”.

“すべての射影集合は可測である” が “正しい” 理由

定理 (Woodin, 198?) ウディン基数が無限個存在するなら，すべての射影集合は可測である．

定理 （Martin, 200?） PFA のもとですべての射影集合は可測である．

PFA : $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の拡張．MA の定義で c.c.c. を “proper” に一般化したもの．

定理 (Folklore, ?) two-step projective absoluteness のもとですべての射影集合は可測である．

“非可測な射影集合が存在する” が “正しい” 理由

補題 射影集合 $R \subseteq \mathbb{R}^2$ で $\mathbb{R}$ の整列順序 (well-ordering) となるものが存在すれば，非可測な射影集合が作れる．

参 考 文 献

[1] 渕野 昌，このスライド:
http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/papers/nagoya-logic-seminar-05.pdf

[2] 渕野 昌，**Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から —**，数学 (Sugaku), Vol.56, No.3 (2004), 248–259.

[3] A. Kanamori: The Higher Infinite, Springer Verlag (1994/1997), （日本語訳: 渕野 昌 訳，巨大基数の集合論，シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998), I – VI, 1 – 554.