ルベーク測度の拡張の可能性について

渕野 昌（中部大学，fuchino@isc.chubu.ac.jp）

2006年12月5日

静岡大学数学教室談話会での講演

X を集合として，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を σ-集合代数とする．$\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$ が確率測度とは，

- $\mu(X) = 1$,
- （σ-加法性）任意の $\mathcal{B}$ の元の pairwise disjoint な可算族 X_i, $i \in I$ に対し，$\sum_{i\in I} \mu(X_i) \left(= \sup\{\sum_{i\in s} \mu(X_i) \,:\, s \in [I]^{<\aleph_0}\}\right) = \mu(\bigcup_{i\in I} X_i)$

が成り立つこと．以下では，全ての $x \in X$ に対し $\mu(\{x\}) = 0$ となることも仮定することにする．また，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 上の測度 $\mu : \mathcal{B} \to [1, \infty]$ とは，$\mathcal{B} \cap \mathcal{P}([0,1])$ 上の測度を拡張し，拡張された σ-加法性を満たすような写像とする．

$S \subseteq \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，$S + a = \{x + a \,:\, x \in S\}$ とする．$S + a$ は S の（a による）平行移動 (translation) である．

$\mathcal{B}$ を translation に関して閉じた σ-集合代数 $\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ とするとき，$\mathcal{B}$ 上の測度 μ が translation invariant であるとは，

- すべての $X \in \mathcal{B}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し $\mu(X) = \mu(X + a)$

が成り立つこと．

定理 1 (Giuseppe Vitali, 1905 — 明治38年)

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を translation に関して閉じた σ-集合代数として，μ を $\mathcal{B}$ 上の translation invariant な測度でルベーク積分を拡張するものとするとき，$\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ である．

証明. X を区間 $[0,1]$ の部分集合で，(a) 任意の異なる $x, y \in X$ に対し，$x - y$ は無理数，(b) X はそのような集合のうち $\subseteq$ に関して極大なもの

となるものとする．特に，どんな $z \in [0,1] - X$ をとってきても，$z - x$ が有理数になるような $x \in X$ が存在する．$X \in \{X \in \mathcal{P}(X) : X \text{ は有界}\} \setminus \mathcal{B}$ を示す．:

(a) から，異なる $q, q' \in \mathbb{Q}$ に対し，$X + q$ と $X + q'$ は共通部分を持たない．

一方 (b) から，$Y = \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} X + q$ は $[0,1]$ を覆い $[-1,2]$ の部分集合となっている．$[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ は可算だから，もし $X \in \mathcal{B}$ なら，$\mathcal{B}$ が translation に関して閉じていることから，$Y \in \mathcal{B}$ となるが，このとき，$\mu(X) = 0$ なら $\mu(Y) = 0$ となり矛盾．$\mu(X) > 0$ としても $\mu(Y) = \infty$ となり矛盾である． ❑

系 ルベーク非可測集合が存在する．

Vitali の定理に対する possible reactions :

(A) 選択公理が悪い．Vitali の定理の証明では（X の構成に）選択公理が本質的に用いられている．選択公理がなければこんなことは起こらないのではないか？

(B) Translation invariance が悪い．こんな条件はいらないのではないか？

(C) Vitali の証明の X の構成は非構成的である．構成的に得られた集合はすべて可測なのではないか？

(D) 非可測集合が存在して何が悪い！可測性の集合論的研究はむしろそういうものがあった方が面白くなるではないか！

(A) 選択公理が悪い．選択公理がなければこんなことは起こらないのではないか？

定理 2 (Robert Solovay, 1970)
ZFC + “到達不可能基数が存在する” が無矛盾なら，ZF + DC + “すべての実数の集合はルベーク可測” も無矛盾である．

ZFC : Zermelo-Frenkel axiom system of set theory with Axiom of Choice
選択公理を含む集合論の公理系

ZF : 集合論の公理系から選択公理を除いたもの

DC : Depenent Choice （従属選択公理）“maximal な有限枝を持たない木は無限の枝を持つ” を主張する選択公理の弱いヴァージョン

到達不可能基数 : 極限基数で正則なもの．到達不可能基数の存在を仮定すると “ZFC は無矛盾である” が証明できる．したがって不完全性定理により，ZFC に到達不可能基数を加えた体系は ZFC より真に強い体系である．

(A) 選択公理が悪い．選択公理がなければこんなことは起こらないのではないか？

定理 2 (Robert Solovay, 1970)
ZFC + "到達不可能基数が存在する" が無矛盾なら，ZF + DC + "すべての実数の集合はルベーク可測" も無矛盾である．

定理 3 (Saharon Shelah, 1984) ZF + "すべての実数の集合はルベーク可測" が無矛盾なら，ZFC + "到達不可能基数が存在する" も無矛盾である．特に定理2で到達不可能基数を条件から落せない．

定理 3$\aleph$ (Saharon Shelah, 1984) ZF + "すべての実数の集合はベールの性質を持つ" の無矛盾性はZFC の無矛盾と同値である．

$X \subseteq \mathbb{R}$ がルベーク可測 $\Leftrightarrow$ ある Borel 集合 B と零集合 N で $X = B \triangle N$ とできる

$X \subseteq \mathbb{R}$ がベールの性質を持つ $\Leftrightarrow$ ある Borel 集合 B と第1種の集合 M で $X = B \triangle M$ とできる

(A) 選択公理が悪い．選択公理がなければこんなことは起こらないのではないか？

定理 4 (Mycielski, Swierczkowski, Mazur, Banach, Davis, 1964) ZF + AD のもとですべての実数の集合はルベーグ可測になる．

${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f : f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ とする．${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ を discrete space $\mathbb{N}$ の product と思って product topology で考える（Baire space）このとき ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ は $\mathbb{R}$ と "ほとんど" 同相である．以降，集合論的に扱いやすい Baire space のことを $\mathbb{R}$ と思うことにする．

$A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ に対し，I, II の二人の players によって戦われる次のような無限ゲーム $G(A)$ を考える: I と II は $\mathbb{N}$ の元 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$,... を交互にとる．無限回の後 $n \mapsto f(n)$ が A の元なら I の勝ち，そうでないなら II の勝ちとする．

AD : （Axiom of Determinacy 決定性公理）すべての $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ に対して，I か II かのどちらかは $G(A)$ の必勝法を持つ．

系． 決定性公理 AD は選択公理と矛盾する．

(A) 選択公理が悪い．選択公理がなければこんなことは起こらないのではないか？

定理 5 (Hugh Woodin, 1985) （ZFC の成り立つ世界で）無限個のウディン基数が存在してその上に一つ可測基数が存在するとき AD が $L(\mathbb{R})$ で成立する．

$L(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ から出発して，定義可能な集合をとる操作を超限回繰り返して得られる集合の作るクラス．$L(\mathbb{R})$ では ZF と DC が成り立つ．

ウディン基数，可測基数 :

到達不可能基数よりはるかに “大きい” が集合論で考察する巨大基数の中では “そこそこの大きさ” を持つ基数

決定性公理 AD は選択公理の alternative と見るべきではない．むしろ選択公理の成り立つ豊かな（つまり存在してもいいような巨大基数がすべて実際に存在するような）世界の内部世界 $L(\mathbb{R})$ で成り立つ原理ととらえるべきである．

(B) Translation invariance が悪い．こんな条件はいらないのではないか？

定理 6 (Robert Solovay, 1971) ZFC + “ルベーグ測度を拡張する測度で，$\mathbb{R}$ のすべての部分集合で定義されているものが存在する” の無矛盾性は ZFC + “可測基数が存在する” の無矛盾性と同値である．

ZFC + “ルベーグ測度を拡張する測度で，$\mathbb{R}$ のすべての部分集合で定義されているものが存在する” から連続体の濃度は非常に大きなものになることが帰結される．

たとえば，Ulam の定理により，このときには連続体濃度以下の（弱）到達不可能基数が存在することが示せる．

連続体濃度が非常に大きいことを帰結する “正しい” 集合論の公理は何か?

(B) Translation invariance が悪い．こんな条件はいらないのではないか？

参考文献

[1] A.E. Caicedo, Real-valued measurable cardinals and well-orderings of the reals, in: Set Theory. Centre de Recerca Matematica Barcelona, 2003-2004, Joan Bagaria, Stevo Todorcevic (eds.), Trends in Mathematics, Birkhauser (2006), 83-120.

[2] S. Fuchino, N. Greenberg and S. Shelah, Models of real-valued measurability, Annals of Pure and Applied Logic 142 (2006), pp. 380-397.

(C) Vitali の証明の X の構成は非構成的である．構成的に得られた集合はすべて可測なのではないか？

簡単のために $\mathbb{R}$ をここでは ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ のこととする．

${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ は無理数の全体（= 普通の意味の実数の全体 – 有理数の全体）と同位相になるから，測度に関しては普通の意味での $\mathbb{R}$ で考えても ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ で考えても同じ．

$X \subseteq \mathbb{R}$ が閉集合の射影として得られるとき，解析集合であるという．

定理 7 (Nikolai Lusin, 1917) すべての解析集合はルベーク可測である．

定理 8 (Kurt Gödel (+ S. Ulam ?), 1951) $V = L$ （すべての集合は構成的である）を仮定すると，解析集合の補集合の射影の形の集合でルベーク可測でないようなものが存在する．

- L : $\emptyset$ から出発して，定義可能な集合をとる操作を超限回繰り返して得られる集合の作るクラス．L では ZFC も連続体仮説も成り立つ（実はもっと強い形の選択公理や一般連続体仮説なども成り立つ）．

(C) Vitali の証明の X の構成は非構成的である．構成的に得られた集合はすべて可測なのではないか？

定理 9 (D.A. Martin and R. Solovay, 1970) Martin の公理と連続体仮説の否定を仮定すると，解析集合の補集合の射影の形にあらわせる実数の集合はすべてルベーク可測になる．

閉集合から出発して射影と補集合をとる操作を繰り返して得られる実数の集合を射影集合 とよぶ．

定理 10 （R. Solovay, S. Shelah, 定理 2, 3 の焼きなおし） ZFC + “すべての射影集合はルベーク可測である” の無矛盾性は，ZFC + “ 到達不可能基数が存在する” の無矛盾性と同値．

定理 11 (H. Woodin, 198?) ウディン基数が無限個存在するなら，すべての射影集合はルベーク可測である．

定理 12 （T. Martin, 200?） PFA のもとで，すべての射影集合は可測である．

(D)　非可測集合が存在して何が悪い！ 可測性の集合論的研究はむしろそういうものがあった方が面白くなるではないか！

$add(N)$

$= \min\{|I| :$ 零集合の族 $N_i, i \in I$ で $\bigcup_{i\in I} N_i$ が零集合でないものが存在する$\}$

$add(M)$

$= \min\{|I| :$ 疎集合の族 $N_i, i \in I$ で $\bigcup_{i\in I} N_i$ が疎集合でないものが存在する$\}$

疎集合：　= 第一類の集合 = nowhere dense sets の可算和としてあらわせる集合

定理 13 (Tomek Bartoszynski, 1984) $add(N) \leq add(M)$.

→ 実数の集合論 (依岡先生の研究分野)