強制法入門

This slide is NOT created by ©PowerPoint.

2007年09月13日 (03:49) 版

渕野昌 (中部大学, fuchino@isc.chubu.ac.jp)

2007年数学基礎論サマースクールでの講義のためのスライドの拡張版

2007年9月4日〜9月6日 静岡大学にて

この講義では，強制法による ZFC 上の（相対的）無矛盾性証明および独立性証明の手法とその基本的な応用のいくつかを概観する．

このスライド版とそのテキスト版の最新版（講義期間中やサマー・スクール終了後にも補足拡張する可能性あり）は，それぞれ，

//http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/shizuoka/lss07_fuchino.pdf

//http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/shizuoka/lss07_fuchinox.pdf

としてダウンロードできる．

前提知識の復習

集合論の公理系 ZFC. ZFC は要素記号 $\in$ を唯一の非論理記号とする１階の論理（$\mathcal{L}_\in$）の（無限個の）論理式（公理）の集まり（公理系）として導入される.

ZFC の公理系は, **外延性の公理**, **空集合の公理**, **対の公理**, **和集合の公理**, **冪集合の公理**, **無限公理**, **分離公理**, **置換公理**, **基礎の公理**, **選択公理**からなる.

このうち, 分離公理と置換公理が無限個の論理式の集まりとして表現されている.

以下, ZFC の十分に大きな有限部分というときには, 分離公理と置換公理の論理式うちの（十分に沢山の）有限個と残りの有限個の公理全部を集めたものとする.

集合 X が **推移的** (**transitive**) とは，任意の $x \in X$ と $y \in x$ に対し，$y \in X$ が成り立つことである．

定理 1　T を ZFC の十分に大きな有限部分とするとき，可算で推移的な集合 M で $M \models T$ となるものが存在する．

証明. $T = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ とする．論理式 $\varphi_T \equiv \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ は T と同値になることに注意する．
反映の原理により，$\alpha \in \mathrm{On}$ で $(V_\alpha \models \varphi_T) \leftrightarrow \varphi_T$ の成り立つようなものが存在する．ZFC $\vdash \varphi_T$ だから，$V_\alpha \models \varphi_T$ である．
Löwenheim-Skolem の定理 を使うと，V_α の可算な初等部分構造 M_0 がとれる．特に $M_0 \models \varphi_T$ である．
上の約束から T は外延性の公理を含む．したがって，Mostowski の崩壊補題 (Collapsing Lemma) により，M_0 と同型で推移的な M がとれる．

$\square$ **(定理 1)**

注意

- 上の定理で，$M \models \cdots$ と言っているのは，より厳密には，$(M, \in \cap M^2) \models \cdots$ ということである．$(M, \in \cap M^2)$ を簡単のため $(M, \in)$ とも書く．
- $M \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ となっているとき，M は $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ の**モデル**である，と言うことにする．
- 不完全性定理により，可算で推移的な M で ZFC のモデルとなるものの存在は（ZFC が矛盾しないかぎり）ZFC から証明できない．
- しかし，強制法の理論が確立した後で，実際の応用では，煩雑をさけるため，“十分に大きな ZFC の有限な部分体系の可算で推移的なモデル M …” と言うかわりに，“ZFC の可算で推移的なモデル M …” と言ってしまうことが多い（これについては後で再論する）．

Posets と generic フィルター

最大元を持つ擬順序集合を **poset** とよぶ．$\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ が poset のとき，$\mathbb{P}$ の最大元を $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ であらわす.

poset $\mathbb{P}$ に対し，クラス $V^{\mathbb{P}}$ を次のような再帰により定義する．

(1) $x \in V^{\mathbb{P}} \Leftrightarrow$ すべての $y \in x$ に対し，$z \in V^{\mathbb{P}}$ と $p \in \mathbb{P}$ で，$y = \langle z, p \rangle$ となるものがとれる．

M を ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとする．$\mathbb{P} \in M$ で $M \models$ "$\mathbb{P}$ は poset である" とする．特に，ここでの「ZFC の十分に大きな有限部分」は上のような $V^{\mathbb{P}}$ の再帰的定義に必要な ZFC の公理をすべて含んでいるとする．このとき，$(V^{\mathbb{P}})^M$ を，$M^{\mathbb{P}}$ とあらわす．$V^{\mathbb{P}}$ の定義から，$M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$ である．

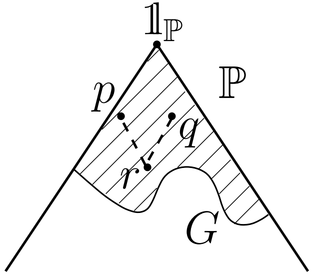
$V^{\mathbb{P}}$（$M^{\mathbb{P}}$）の要素を **$\mathbb{P}$-名称**（**$\mathbb{P}$-name**）とよぶ．$\mathbb{P}$-名称はドットつきの記号 $\dot{a}, \dot{b}, \dot{x}$ などであらわすことにする．

$p, q \in \mathbb{P}$ が **共存可能** (**compatible**) とは，$r \in \mathbb{P}$ で $r \leq_{\mathbb{P}} p, q$ となるものが存在すること．共存可能でないとき **共存不可能** (**incompatible**) であるという.

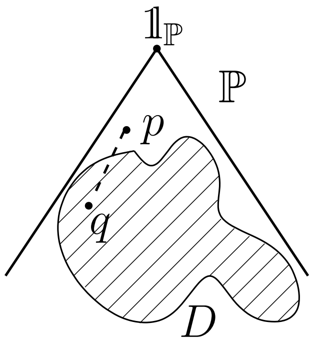
$G \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$（上の）**フィルター** (**filter**) であるとは,

(2)　$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in G$ で，G は上方向に閉じている．

(3)　$p, q \in G$ なら，p と q は共存可能で，$r \in G$ で，$r \leq_{\mathbb{P}} p, q$ となるものが存在する．



$\mathbb{P}$ を poset とするとき，$D \subseteq \mathbb{P}$ が（$\mathbb{P}$ で）**稠密**（**dense**）とは，すべての $p \in \mathbb{P}$ に対し，$q \in D$ で $q \leq_{\mathbb{P}} p$ となるものが存在することとする．



M をZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデル，$\mathbb{P} \in M$，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は poset" とする．G が **$(M, \mathbb{P})$-generic 集合** とは，

(4)　G の任意の2つの元は共存可能である．

(5)　$D \in M$ で $M \models$ "D は $\mathbb{P}$ で稠密" なら，$D \cap G \neq \emptyset$ である．

G が，$(M, \mathbb{P})$-generic 集合で，$\mathbb{P}$ で上方向に閉じているとき，G は **$(M, \mathbb{P})$-generic フィルター** であるという．

M をZFCの（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとして，
$\mathbb{P} \in M$, $M \models$ “$\mathbb{P}$ は poset” とする．

補題 2　G が $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターなら G はフィルターである．

補題 3　M が可算なら，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対し，p を含む $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターが存在する．

補題 2　G が $(M,\mathbb{P})$-generic フィルターなら G はフィルターである．

証明. G を $(M,\mathbb{P})$-generic フィルターとする．G が (2) を満たすことは，generic フィルターの定義によりよい．したがって，G が (3) を満たすことを確かめればよい．

$x, y \in G$ として，M の中で，

$$D = \{r \in \mathbb{P} : r \leq_{\mathbb{P}} x, y \text{ であるか，または，} \\ r \text{ は } x \text{ か } y \text{ のうちの少なくとも1つと共存不可能}\}$$

とすると，$D \in M$ で，$M \models$ "D は $\mathbb{P}$ の稠密部分集合である" が成り立つ．

したがって，G が $(M,\mathbb{P})$-generic フィルターであることから，$G \cap D \neq \emptyset$ となる．$r \in G \cap D$ とすると，(4) により，r は x とも y とも共存可能だから，D の定義から $r \leq_{\mathbb{P}} x, y$ である．　□ **(補題 2)**

補題 3 M が可算なら，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対し，p を含む $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターが存在する．

証明. M を外からながめて議論する．
$\mathcal{D} = \{D \in M : M \models \text{“}D \text{ は稠密”}\}$ とすると，$\mathcal{D} \subseteq M$ だから
（M の外から見たとき）$\mathcal{D}$ は可算である．
そこで $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ と枚挙する．
各 D_n が $\mathbb{P}$ で稠密であることから，$\mathbb{P}$ の要素の下降列

$$\cdots \quad \leq_{\mathbb{P}} \quad p_{n+1} \quad \leq_{\mathbb{P}} \quad p_n \quad \leq_{\mathbb{P}} \quad \cdots \quad \leq_{\mathbb{P}} \quad p_2 \quad \leq_{\mathbb{P}} \quad p_1 \quad \leq_{\mathbb{P}} \quad p_0 = p$$

で，すべての $n \in \omega$ に対し，$p_{n+1} \in D_n$ となるようなものがとれる．
このとき $G = \{p_n : n \in \omega\}$ は $(M, \mathbb{P})$-generic 集合である．
したがって，$G' = \{p : \text{ある } q \in G \text{ に対し } q \leq_{\mathbb{P}} p\}$ は
$(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとなる． □ **(補題 3)**

後に出てくる具体的な $\mathbb{P}$ に対する $(M,\mathbb{P})$-generic 集合 G の構成では，常に $G \notin M$ となる．これは，以下の補題による:

補題 4 $\mathbb{P}$ が

(6) すべての $p \in \mathbb{P}$ に対し，互いに共存不可能な $q, q' \leq_{\mathbb{P}} p$ が存在する．

を満たすとき，任意の $(M,\mathbb{P})$-generic 集合 G は M の要素でない．

証明. $G \in M$ と仮定して矛盾を示す．
$G \in M$ とすると，$D = \mathbb{P} \setminus G$ も M の要素である．
(6) により D は$\mathbb{P}$ の稠密な部分集合になる．
したがって，G の generic 性から，$D \cap G \neq \emptyset$ とならなくてはならない．
これは矛盾である． □ **(補題 4)**

$\mathbb{P}$ を poset として，G を $\mathbb{P}$ 上のフィルターとする．$\mathbb{P}$-name $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ に対し，**$\dot{x}$ の G による解釈** $\dot{x}^G$ を次のようにして再帰的に定義する:

$$(7) \qquad \dot{x}^G = \{\dot{u}^G : \text{ある } p \in G \text{ に対し，} \langle \dot{u}, p \rangle \in \dot{x}\}.$$

M を ZFC の十分に大きな有限部分の推移的なモデルとして，$\mathbb{P} \in M$ を poset とし，G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．

$\mathbf{M[G]} = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}$ とする．$M[G]$ は M の G による **generic-拡大** とよばれる．次が成り立つ:

補題 5 $M \subseteq M[G]$ で，$G \in M[G]$ である．

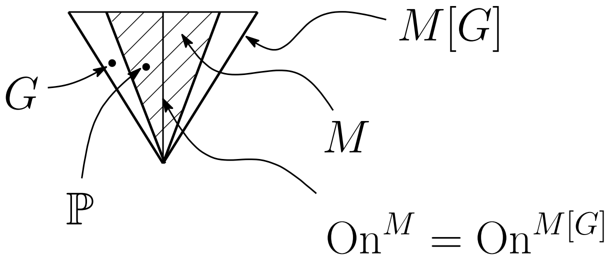
補題 6 $M[G]$ は推移的で，$\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$ である．

補題 7 N を $M \subseteq N$ で $G \in N$ となるような，ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとするとき，$M[G] \subseteq N$ である．

補題 5　$M \subseteq M[G]$ で，$G \in M[G]$ である．

補題 6　$M[G]$ は推移的で，$\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$ である．

補題 7　N を $M \subseteq N$ で $G \in N$ となるような，ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとするとき，$M[G] \subseteq N$ である．



補題 5 $M \subseteq M[G]$ で，$G \in M[G]$ である．

証明. 各集合 x に対し，x の標準的な $\mathbb{P}$-名称 $\check{x}$ を次のように再帰的に定義する: $\check{x} = \{\langle \check{u}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle : u \in x\}$.

このとき，

(8) すべての $\mathbb{P}$ 上のフィルター G とすべての集合 x に対し，$\check{x}^G = x$ が成り立つ．

が，$\in$ に関する帰納法により示せる．

$x \in M$ なら，$\check{x} \in M$ だから，$x = \check{x}^G \in M[G]$ である．

$\mathbb{P}$ 上の generic-フィルターの標準的な $\mathbb{P}$-名称 Γ を，$\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$ と定義すると，$\Gamma \in M$ である．

(8) と $\mathbb{P}$-名称の解釈の定義から，$\Gamma^G = G$ となることがわかるので，$G = \Gamma^G \in M[G]$ である． □ **(補題 5)**

補題 6 $M[G]$ は推移的で，$\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$ である．

証明. $M[G]$ が推移的であることを示すために，$x \in M[G]$, $y \in x$ とする．$x = \dot{x}^G$ となる $\dot{x} \in M$ があるが，$\dot{x}^G$ の定義から，ある，$\langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x}$ で $p \in G$ となるものに対し，$y = \dot{y}^G$ となる．M は推移的だから，$\dot{y} \in M$ である．したがって，$y = \dot{y}^G \in M[G]$ である．

$M[G]$ が推移的で，補題 5 により $M \subseteq M[G]$ であることから，$\mathrm{On}^M \subseteq \mathrm{On}^{M[G]}$ がわかる．

すべての $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ に対し，$rank(\dot{x}^G) \leq rank(\dot{x})$ となることが，$\in$ に関する帰納法により示せる．特に，$\mathrm{On}^M \supseteq \mathrm{On}^{M[G]}$ である． □ **(補題 6)**

補題 7 N を $M \subseteq N$ で $G \in N$ となるような，ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとするとき，$M[G] \subseteq N$ である．

証明. $\dot{x} \in M$ なら，$\dot{x}^G = (\dot{x}^G)^N \in N$ である． □ **(補題 7)**

generic 拡大を用いた相対的無矛盾性証明のアウトライン

ある数学的命題 φ が ZFC 上で相対的無矛盾であることを示すためには，次の (9), (10) が確立されれば十分である:

(9) Δ を任意の ZFC の有限部分とするとき，十分に大きな，有限な $\Gamma \subseteq \mathrm{ZFC}$ をとれば，Γ の可算な推移的モデル M の（任意の poset $\mathbb{P} \in M$ による）generic 拡大 $M[G]$ は Δ のモデルとなる．

(10) ある定義によって規定される poset $\mathbb{P}$ を (9) でのような M でとるとき，任意の $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi$ が常に成り立つ．

(9) Δ を任意の ZFC の有限部分とするとき，十分に大きな，有限な $\Gamma \subseteq$ ZFC をとれば，Γ の可算な推移的モデル M の（任意の poset $\mathbb{P} \in M$ による）generic 拡大 $M[G]$ は Δ のモデルとなる．

(10) ある定義によって規定される poset $\mathbb{P}$ を (9) でのような M でとるとき，任意の $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi$

ZFC $+ \varphi$ が矛盾するとすると，ZFC の有限部分 Δ で，$\Delta + \varphi$ が矛盾するようなものがとれる．つまり，$\Delta \vdash \neg\varphi$ である．

一方，この Δ に対して，(9) でのような Γ をとり，Γ のモデルになっているような推移的な可算モデル M をとって，(10) でのような $\mathbb{P} \in M$ を用いて generic 拡大 $M[G]$ をとれば，$M[G] \models \varphi$ となるが，(9) により，$M[G] \models \Delta$ なので，$M[G] \models \neg\varphi$ である．これは矛盾である．

(9) と (10) の確立のためには，これらより若干すっきりとした形をしている，次の (9') と (10') の証明が得られれば十分である:

(9') 任意の ZFC の可算な推移的モデル M の（任意の poset $\mathbb{P} \in M$ による）generic 拡大 $M[G]$ は ZFC のモデルとなる．

(10') ある定義によって規定される poset $\mathbb{P}$ を，ZFC の可算な推移的モデル M でとるとき，任意の $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi$ が常に成り立つ．

(9') と (10') の証明には，強制関係（forcing relation; 記号: $\Vdash$ "$\cdots$"）とよばれる，以下で導入される ZFC で定義可能な関係（の族）が用いられる．

強制関係

$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ ごとに，poset $\mathbb{P}$, $p \in \mathbb{P}$ と $\mathbb{P}$-名称 $\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1}$ に対し，$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$"（が成り立つ）という述語 —— **強制関係 (forcing relation)** を（φ の構成に関する帰納法により）以下のようにして定義する．

$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$" は，"$p$ は $\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$ を force する" と読み下す．

目標: ZFC の可算で推移的なモデル M と $\mathbb{P} \in M$, $p \in \mathbb{P}$, および $M^{\mathbb{P}}$-名称 $\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1}$ に対し，$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$" が，$M$ で成り立つことが，

> p を含むような，すべての $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，
> $M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$

と同値になるようにしたい．

(11) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{a}_0 = \dot{a}_1$" $\Leftrightarrow$

(α) すべての $\langle \dot{b}_0, p_0 \rangle \in \dot{a}_0$ に対し,

$$\{q \leq_{\mathbb{P}} p : q \not\leq_{\mathbb{P}} p_0 \ \vee \ \exists \langle \dot{b}_1, p_1 \rangle \in \dot{a}_1 \ (q \leq_{\mathbb{P}} p_1 \ \wedge \ q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{b}_0 = \dot{b}_1\text{”})\}$$

は p 以下で稠密となり, <u>かつ</u>,

(β) すべての $\langle \dot{b}_1, p_1 \rangle \in \dot{a}_1$ に対し,

$$\{q \leq_{\mathbb{P}} p : q \not\leq_{\mathbb{P}} p_1 \ \vee \ \exists \langle \dot{b}_0, p_0 \rangle \in \dot{a}_0 \ (q \leq_{\mathbb{P}} p_0 \ \wedge \ q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{b}_0 = \dot{b}_1\text{”})\}$$

も p 以下で稠密となる.

(11) は, ($\mathbb{P}$ をパラメタとした) $V^{\mathbb{P}} \times V^{\mathbb{P}}$ 上の整順的な関係

($\aleph$1) $\langle \dot{b}_0, \dot{b}_1 \rangle \ R \ \langle \dot{a}_0, \dot{a}_1 \rangle \ \Leftrightarrow$

ある $r \in \mathbb{P}$ に対し $\langle \dot{b}_0, r \rangle \in \dot{a}_0$ かつ, ある $s \in \mathbb{P}$ に対し $\langle \dot{b}_1, s \rangle \in \dot{a}_1$

に関する超限帰納法により定義できる．

(12) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{a}_0 \in \dot{a}_1$" $\Leftrightarrow$
$\{q \in \mathbb{P} : \exists \langle \dot{b}, r \rangle \in \dot{a}_1 \ (q \leq$

(13) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1}) \land \psi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" $\Leftrightarrow$
$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" かつ $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\psi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"

(14) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\neg\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" $\Leftrightarrow$
どの $q \leq_{\mathbb{P}} p$ に対しても $q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" とならない

(15) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists x_0 \varphi(x_0, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" $\Leftrightarrow$
$\{r \in \mathbb{P} : \exists \dot{a}_0 \in V^{\mathbb{P}} (r \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"$)\}$ は p 以下で稠密．

次の補題は $\cdot \Vdash_{\cdot}$ "$\varphi(\cdot, \ldots, \cdot)$" の定義から容易に導ける:

補題 8　次は同値である:

(a) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$”.

(b) $\forall r \leq_{\mathbb{P}} p\ (r \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$”$)$.

(c) $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$”$\}$ は p 以下で稠密.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a), (b) $\Rightarrow$ (c) は自明である.

(a) $\Rightarrow$ (b): $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$” で $r \leq_{\mathbb{P}} p$ なら, $r \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$” となることを, φ の構成に関する帰納法で証明する.

(c) $\Rightarrow$ (a): $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$”$\}$ が p 以下で稠密なら, $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$” となることを, φ の構成に関する帰納法で証明する.

$\square$ **(補題 8)**

定理 9 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，M を推移的な ZFC のモデルとし（可算でなくてもよい），$\mathbb{P}$ を poset で $\mathbb{P} \in M$ となるものとし，$\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1} \in M^{\mathbb{P}}$ とする．G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとするとき，次が成り立つ:

(i) $p \in G$ で $M \models$ "$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"" なら，
$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, \ldots, (\dot{a}_{n-1})^G)$ である．

(ii) $M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, \ldots, (\dot{a}_{n-1})^G)$ なら，
$p \in G$ で $M \models$ "$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"" となるものが存在する．

補題 3 と 定理 9 から次が導かれる:

定理 10 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，M を可算で推移的な ZFC のモデルとし，$\mathbb{P}$ を poset で $\mathbb{P} \in M$ となるものとし，$\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1} \in M^{\mathbb{P}}$ とする．このとき次が成り立つ:

(i) $M \models$ "$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" " $\Leftrightarrow$
すべての p を含む $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，
$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, \ldots, (\dot{a}_{n-1})^G)$.

(ii) すべての $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G^* に対し，
$M[G^*] \models \varphi((\dot{a}_0)^{G^*}, \ldots, (\dot{a}_{n-1})^{G^*})$ $\Leftrightarrow$
ある $p \in G^*$ に対し，すべての p を含む $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, \ldots, (\dot{a}_{n-1})^G)$ が成り立つ．

すべての $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G は $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ を含む.
したがって，定理 10, (i) から，特に

(16) $M \models$ "$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$"" $\Leftrightarrow$
すべての $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，
$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$.

となることがわかる.
そこで，$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$" を，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$" と略記して，
"$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$ は（が） $\mathbb{P}$ で force される" と読み下すことにする.

$M[G]$ は ZFC のモデルである

強制関係を用いることで次の定理（群）が証明できる:

すべての ZFC の公理（あるいは ZFC の有限個の公理の $\wedge$-結合）ψ に対し，次が成り立つ:

定理 11 $_\psi$ M を推移的な ZFC のモデルとする．$\mathbb{P} \in M$ を poset として，G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとするとき，$M[G] \models \psi$ である．

証明. $M[G]$ は推移的だから，$M[G] \models$ “外延性公理” である．

また，$\emptyset, \omega \in M \subseteq M[G]$ だから，$M[G] \models$ “空集合公理，無限公理” である．

他の公理については，たとえば，$M[G]$ が $\mathcal{L}_\in$-論理式 φ に対する分離公理を満たすことは，次のようにして示せる:

$\dot{b}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{n-1}$ を $\mathbb{P}$-名称とする．このとき，M の中に，次を満たすような $\mathbb{P}$-名称 $\dot{c}$ が存在することが示せればよい．

$$(\aleph 2) \quad M[G] \models \forall x\,(x \in \dot{c}^G \;\leftrightarrow\; x \in \dot{b}^G \wedge \varphi(x, (\dot{a}_1)^G, \ldots, (\dot{a}_{n-1})^G))$$

このために，

$$\begin{aligned} \dot{c} = \{\langle \dot{u}, q\rangle : \dot{u} \text{ は } \mathbb{P}\text{-名称}; \text{ある } p \in \mathbb{P} \text{ に対し } \langle \dot{u}, p\rangle \in \dot{b}; \\ q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{u} \in \dot{b} \wedge \varphi(\dot{u}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{n-1})\text{”}\} \end{aligned}$$

とすると，$\dot{c}$ は $\mathbb{P}$-名称になるが，この $\dot{c}$ が求めるようなものになっている．

$M[G]$ で議論して，$(\aleph 2)$ が成り立つことを示す.

$d \in M[G]$ で $d \in \dot{c}^G$ なら，$q \in G$ と $\mathbb{P}$-名称 $\dot{d}$ で， $\dot{d}^G = d$ かつ，$\langle \dot{d}, q\rangle \in \dot{c}$ となるものがある．

$\dot{c}$ の定義から，$M \models$ “$q \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{d}, \dot{a}_1, ..., \dot{a}_{n-1})$” ” となるから，定理 9, (i) により，$M[G] \models \varphi(\underbrace{\dot{d}^G}_{= d}, (\dot{a}_1)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$ である．

逆に，$d \in M[G]$ が，$M[G] \models d \in \dot{b}^G \wedge \varphi(d, (\dot{a}_1)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$ を満たすとすると，$\langle \dot{u}, p \rangle \in \dot{b}$ で，$p \in G$, $\dot{u}^G = d$ となるものがとれる．定理 9, (ii) により，$q \in G$ で，

$$M \models \text{“}q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\varphi(\dot{u}, \dot{a}_1, ..., \dot{a}_{n-1})\text{” ”}$$

となるものがとれる．$r \in G$ を $r \leq_{\mathbb{P}} p, q$ となるようにとれば，

$$M \models \text{“}r \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{u} \in \dot{b} \wedge \varphi(\dot{u}, \dot{a}_1, ..., \dot{a}_{n-1})\text{” ”}$$

である．したがって，$\dot{c}$ の定義から，$\langle \dot{u}, r \rangle \in \dot{c}$ となる．
よって，$M[G] \models d = \dot{u}^G \in \dot{c}^G$ である．
以上で，$\dot{c}$ が $(\aleph 2)$ を満たすことが示せた．

□ **(定理 11)**

$M[G]$ での基数

M を可算で推移的な ZFC のモデルとして，$\mathbb{P} \in M$ を poset とし，G を $(M, \mathbb{P})$-generic とする．

補題 6 により， $\mathrm{On}^{M[G]} = \mathrm{On}^{M}$ だから，$\mathrm{Card}^{M[G]} \subseteq \mathrm{Card}^{M}$ である．

ここで "$=$" は一般には成り立たない．

$\kappa \in \mathrm{Card}^{M}$ で，$M \models$ "$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "κ は基数"" が成り立つとき，$\mathbb{P}$ は基数 κ を保存する，という．$\mathbb{P}$ がどの基数を保存するかは，$M[G]$ の構造を知るために重要となる．

以下で，$\mathbb{P}$ が特定の基数を保存するための二種類の十分条件を考察する:

κ を基数とする．$\mathbb{P}$ が κ-閉鎖(κ-closed)であるとは，長さが κ 未満の $\mathbb{P}$ 下降列が，すべて下限を持つことである．

ω_1-閉鎖は σ-閉鎖 (σ-closed) ともよばれる．

定理 12 $M \models$ "κ は基数" として，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は κ-閉鎖" なら，$\mathbb{P}$ は κ より小さいか等しいすべての（M での）基数を保存する．

この定理は次の，より一般的な定理からただちに導ける:

定理 13 $M \models$ "κ は基数" として，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は κ-閉鎖" とする．G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとするとき，$M[G]$ での長さが κ 未満の順序数の列はすべて M の元である[*1]．

$X \subseteq \mathbb{P}$ が反鎖 (antichain) であるとは，任意の異なる $p, q \in X$ が共存不可能であることである．

$\mathbb{P}$ が κ-連鎖条件 (κ-chain condition) を満たすとは，$\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満のときである．

$\aleph_1$-連鎖条件は countable chain condition ともよばれ，c.c.c. または ccc と略記されることも多い．

定理 14 $M \models$ “κ は正則基数” で，$M \models$ “$\mathbb{P}$ は κ-連鎖条件を満たす” なら，$\mathbb{P}$ は，κ より大きいか等しい，すべての（M での）基数を保存する．

Posetsの典型的な例のうちのいくつか

κ を基数として，I, J を集合とし，$|I| \geq \kappa$ とする．

$$\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$$
$$= \{f : f \text{ は } I \text{ の濃度が } \kappa \text{ 未満の部分集合から } J \text{ への関数}\}$$

とする，

$f, g \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ に対し，

$$f \leq_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)} g \;\Leftrightarrow\; f \supseteq g$$

とする．

特に，λ を基数として $I = \lambda \times \omega$, $J = 2 = \{0, 1\}$, $\kappa = \omega$ と置いたときの $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$, つまり $\mathrm{Fn}(\lambda \times \omega, 2, \omega)$ を，$\mathbb{C}_\lambda$ と表し，λ 個の実数を付加するコーエン poset とよぶ．

定理 15 (a) κ が正則基数なら $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ は κ-閉鎖である．
(b) $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ は $(|J|^{<\kappa})^+$-連鎖条件を満たす.

定理 16 M を可算で推移的な ZFC のモデルとする．

(a) $M \models$ "$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$" として，$G$ を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．このとき $\bigcup G$ は I から J への上射になる．

(b) $M \models$ "$\mathbb{P} = \mathbb{C}_\lambda$" として，$G$ を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．(a) から，$g = \bigcup G$ は $\lambda \times \omega$ から 2 への関数となる．$\alpha < \lambda$ に対し，$g_\alpha : \omega \to 2$ を $n \mapsto g(\alpha, n)$ で定義すると，$g_\alpha \in M[G]$ で g_α, $\alpha < \lambda$ は互いに異なる．

λ を基数として，

$$(17) \quad \mathbb{R}_\lambda = \{X : X \in Bor({}^{\lambda\times\omega}2),\ \mu(X) > 0\}$$

とする．

ただし，${}^{\lambda\times\omega}2$ は $\kappa \times \omega$ から 2 への関数の全体で，これに 2 上の離散位相の積位相を入れて位相空間と考える．

また，位相空間 S に対し，$Bor(S)$ で S の Borel 集合の全体をあらわす．

μ は 2 上の canonical な測度の積測度として得られる $Bor({}^{\lambda\times\omega}2)$ 上の測度である．

$p, q \in \mathbb{R}_\lambda$ に対し，

$$q \leq_{\mathbb{R}_\lambda} p \ \Leftrightarrow\ q \subseteq p$$

とする．

$\mathbb{R}_\lambda$ は ランダム実数を side-by-side に λ 個付け加える poset である．

補題 17 $\mathbb{R}_\lambda$ は ccc を満たす.

補題 18 M を可算で推移的な ZFC のモデルとして, $M \models$ "$\mathbb{P} = \mathbb{R}_\lambda$" とし, G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする. このとき,

(a) $\bigcap G$ は $\lambda \times \omega$ から 2 への関数となる. $\alpha < \lambda$ に対し, $g_\alpha : \omega \to 2$ を $n \mapsto g(\alpha, n)$ で定義すると, $g_\alpha \in M[G]$ で g_α, $\alpha < \lambda$ は互いに異なる.

(b) すべての $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G]}$ に対し, $g \in ({}^\omega\omega)^M$ で $f \leq g$ となるものが存在する.

最後に, ここで考察した posets の比較的簡単な応用 —— 連続体仮説の ZFC からの独立と, ω_1-スケールの存在の ZFC + $\neg$CH からの独立の証明 —— を見てみることにする.

連続体仮説

連続体仮説 (CH) は，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という命題だった．ここに $2^{\aleph_0}$ は，基数 $|\mathbb{R}| = |{}^{\omega}2| = |{}^{\omega}\omega| = |\mathcal{P}(\omega)|$ である．

強制法を用いると CH の ZFC からの独立性が証明できる．

定理 19 M を可算で推移的な ZFC のモデルとする．
$M \models$ "$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2^{\aleph_0}, \aleph_1)$" として G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとすると，$M[G] \models \mathrm{CH}$ である．特に，CH は ZFC 上相対的無矛盾である．

証明. 定理 16, (a) により，
$M[G] \models (\aleph_1)^M = (2^{\aleph_0})^M \leq (\aleph_1)^{M[G]}$ である．
ところが，定理 15, (a) と 定理 13 により $({}^{\omega}\omega)^M = ({}^{\omega}\omega)^{M[G]}$ だから，
$M[G] \models \mathrm{CH}$ がわかる． □ **(定理 19)**

定理 20 M を可算で推移的な ZFC のモデルとする．
$M \models$ "$\lambda \geq \aleph_2 \wedge \mathbb{P} = \mathbb{C}_\lambda$" として G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとすると，$M[G] \models \neg\mathrm{CH}$ である．
特に $\neg\mathrm{CH}$ は ZFC 上相対的無矛盾である．

証明. 定理 15, (a) により $\mathbb{P}$ は ccc を満たす．したがって，定理 14 により，$\mathbb{P}$ はすべての基数を保存する．
定理 16, (b) により，$M[G] \models$ "$|{}^{\omega}2| \geq \lambda$" だから，特に $M[G] \models \neg\mathrm{CH}$ である．
□ **(定理 20)**

定理 19 と定理 20 により，CH は ZFC 上独立であることが結論できる．

ω_1-スケールの存在

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$f \leq^* g \iff \{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \text{ は有限集合である}$$

とする．$\leq^*$ は擬順序となることが容易に確かめられる．
$\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ が ω_1-スケールであるとは，

(18) $\mathcal{F}$ は $\leq^*$ によって，順序型 ω_1 に整列される．

(19) すべての $f \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$g \in \mathcal{F}$ で $f \leq^* g$ となるものが存在する．

が成り立つことである．

補題 21　$S \subseteq {}^\omega\omega$ を可算とするとき，$f \in {}^\omega\omega$ で，$g \leq^* f$ がすべての $g \in S$ に対し成り立つようなものが存在する．

証明. $S = \{g_n : n \in \omega\}$ と整列する．
$f(n) = \max\{g_0(n), \ldots g_n(n)\} + 1$ として f を定義すれば，これが求めるようなものである．　□ **(補題 21)**

定理 22　CH のもとで ω_1-スケールが存在する．

証明. ${}^\omega\omega = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙する．これは CH により可能である．
ここで，$f_\alpha \in {}^\omega\omega$ を帰納的に，

(20)　すべての $\beta < \alpha$ に対し $f_\beta \leq^* f_\alpha$

(21)　$g_\alpha \leq^* f_\alpha$

となるようにとってゆく．これは，補題 21 により可能である．
$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が求めるようなものである．　□ **(定理 22)**

定理 23 M を可算で推移的な ZFC のモデルとする．
$M \models$ "$\lambda \geq \aleph_2 \ \wedge \ \mathbb{P} = \mathbb{C}_\lambda$" として G を $(M, \mathbb{P})$-*generic* フィルターとすると，$M[G] \models$ "ω_1-スケールは存在しない" が成り立つ．

証明. $I \subseteq \lambda$ に対し，$\mathbb{C}_I = \mathrm{Fn}(I \times \omega, 2, \omega)$ とあらわすことにする．
$\mathcal{F} \in M[G]$ で $M[G] \models$ "$\mathcal{F}$ は ω_1-スケール" だったとして矛盾を示す．
M と $M[G]$ を行き来して議論する．
$\mathbb{C}_\lambda$ は ccc を満たすから，$|I| = \aleph_1$ となる $I \subseteq \lambda$ で，$G_I = G \cap \mathbb{C}_I$ としたときに $\mathcal{F} \in M[G_I]$ となるようなものが存在する．
$\alpha \in \lambda \setminus I$ として $g_\alpha : \omega \to 2$ を，定理 16, (b) でのようにとり，$h : \omega \to \omega$ を $(g_\alpha)^{-1}{''}\{1\}$ を下から順に枚挙するような関数とする．このとき，どの $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G_I]}$ に対しても $h \not\leq^* f$ となることが示せるが，これは矛盾である． □ **(定理 23)**

定理 24 M を可算で推移的な ZFC + CH のモデルとする．$M \models$ "$\lambda \geq \aleph_2 \ \wedge \ \mathbb{P} = \mathbb{R}_\lambda$" として G を $(M, \mathbb{P})$-*generic* フィルターとすると，$M[G] \models$ "$\neg$CH $\wedge$ ω_1-スケールが存在する" が成り立つ．

証明. 補題 17 により，$\mathbb{P}$ はすべての基数を保存する．したがって，補題 18 (a) により，$M[G] \models \neg$CH である．補題 22 により M には ω_1-スケールが存在するが，補題 18, (b) により，この ω_1-スケールは $V[G]$ でも ω_1-スケールになっている． □ **(定理 24)**

系 25 "ω_1-スケールが存在する" は ZFC + $\neg$CH から独立である．