強制法入門 Aufforderung zur Erzwingungsmethode (Forcing)

2007年09月02日 (07:01) 版 渕野 昌 (中部大学, fuchino@isc.chubu.ac.jp)

2007年数学基礎論サマースクールでの講義のための予稿

2007年9月4日〜9月6日 静岡大学にて

この講義では，強制法による ZFC 上の（相対的）無矛盾性証明および独立性証明の手法とその基本的な応用のいくつかを概観する．

このスライド版とそのテキスト版の最新版（講義の後もさらに補足拡張する可能性もある）は，それぞれ,

//http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/shizuoka/lss07_fuchino.pdf

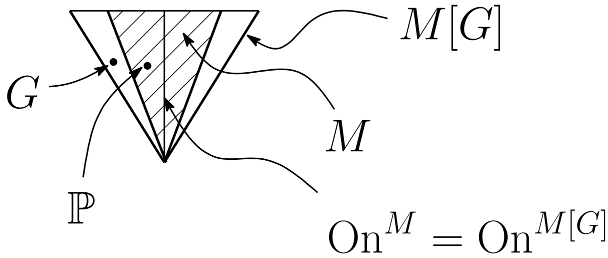
//http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/shizuoka/lss07_fuchinox.pdf

としてダウンロードできる[*1]．

[*1] スライド版とテキスト版の主な違いは，ページ・フォーマットと,（この脚注のような）脚注，および子細な証明の有無である．両方の版は同一の pLaTeX のソース・ファイルから生成されている．講義でのスライドの表示は dviout による．また本文中の図式や絵などは WinTpic Ver.3.08 により作成した．

At the same time, always, overhead, there is the eternal, negative radiance of snows. Beneath is life, the hot jet of the blood playing elaborately. But above is the radiance of changeless not-being. And life passes away into this changeless radiance. $\cdots$

D.H.Lawrence:
Twilight in Italy (1930)



目次

ここに印刷されているテキストは，2007 年 09 月 02 日 (07:01) の時点の不完全なバージョンである．特に，「強制関係」以降の節ではアウトラインしか書かれていない部分が多い．更に拡張されたヴァージョンは，講義を行う時点では用意されていて，前ページに記した web ページからダウンロードできる予定である．

前提知識の復習[*2]

集合論の公理系 ZFC. ZFC は要素記号 $\in$ を唯一の非論理記号とする１階の論理（$\mathcal{L}_\in$）の（無限個の）論理式（公理）の集まり（公理系）として導入される．

ZFC の公理系は，**外延性の公理**，**空集合の公理**，**対の公理**，**和集合の公理**，**冪集合の公理**，**無限公理**，**分離公理**，**置換公理**，**基礎の公理**，**選択公理** からなる．

このうち，<u>分離公理</u>と<u>置換公理</u>が無限個の論理式の集まりとして表現されている．

以下，ZFC の十分に大きな有限部分というときには，分離公理と置換公理の論理式うちの（十分に沢山の）有限個と<u>残りの有限個の公理全部</u>を集めたものとする．“十分に大きな” は，後で必要となる公理はすべて含まれているというほどの意味である．

集合 X が **推移的** (**transitive**) とは，任意の $x \in X$ と $y \in x$ に対し，$y \in X$ が成り立つことである．

定理 1 T を ZFC の十分に大きな有限部分とするとき，可算で推移的な集合 M で $M \models T$ となるものが存在する[*3]．

証明. $T = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ とする．論理式 $\varphi_T \equiv \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ は T と同値になることに注意する．

[*2] 必要な前提知識は，例えば，渕野 [4] に細説した内容でカヴァーできるはずである．自分で書いたものを引用するのも気がひけるが，[4] は，まさにこの講義のような，ほんの少しアドバンストな講義のベースとして使える，ということも視野に入れて書いたものなので，以下の脚注の補足では，この本との対応がつくようにしている．

[*3] 集合 X を構造としてとらえるときには，ここでは，何も言わないときには， 構造 $(X, \in) = (X, \in \cap X^2)$ を考えている．構造 $\mathfrak{A}$ とその言語上の論理式 φ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ は「$\mathfrak{A}$ で φ が成り立つ.」をあらわす．“$\mathfrak{A} \models \varphi$” は論理式 φ の複雑さに関する帰納法によって導入できる．$\mathfrak{A} \models \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ のとき，$\mathfrak{A}$ は，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ の**モデル**である，という．(一般には有限個とは限らない個数の）閉論理式からなる公理系 T に対する “$\mathfrak{A} \models T$” “$\mathfrak{A}$ は T のモデルである” 等も同様に定義する．

反映の原理[*4]により，$\alpha \in \mathrm{On}$ で $(V_\alpha \models \varphi_T) \leftrightarrow \varphi_T$ の成り立つようなものが存在する．$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi_T$ だから，$V_\alpha \models \varphi_T$ である．

Löwenheim-Skolem の定理[*5] を使うと，V_α の可算な初等部分構造 M_0 がとれる．特に $M_0 \models \varphi_T$ である．

上の約束から T は外延性の公理を含む．したがって，$M_0 = (M_0, \in)$ は外延的で，基礎の公理から $\in \cap (M_0)^2$ は整順的だから，Mostowski の 崩壊補題 (Collapsing Lemma)[*6] により，M_0 と同型で推移的な M がとれる．特に $M \models \varphi_T$ だから，M は T のモデルである． □ **(定理 1)**

Posets と generic フィルター[*7]

最大元を持つ擬順序集合[*8]を **poset** とよぶ．$\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ が poset のとき，$\mathbb{P}$ の最大元を $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ であらわす．

poset $\mathbb{P}$ に対し，クラス $V^{\mathbb{P}}$ を次のような再帰により定義する．

[*4] **反映の原理 （[4] の定理 3.7）** φ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ を φ の部分論理式の全体（φ 自身も含む）とする．このとき，順序数のクラス C_φ を $C_\varphi = \{\alpha \in \mathrm{On} :$ すべての $i < n$ に対し φ_i は V_α 上で絶対的となる $\}$ と定義すると，C_φ は閉非有界な部分クラスを含む．

[*5] **Löwenheim-Skolem の定理**（のある程度一般化されたヴァージョン）$\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ を可算な言語 $\mathcal{L}$ を持つ構造とする．任意の無限集合 $X \subseteq A$ に対し，X と濃度の等しい $\mathfrak{A}$ の初等部分構造 $\mathfrak{B}$ が存在する．

$\mathfrak{B} = \langle B, \cdots \rangle$ が $\mathfrak{A}$ の初等部分構造である (記法: $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$) とは，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の部分構造で，任意の $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi(x_0, x_1, \ldots)$ と B の要素 $b_0, b_1, \ldots$ に対し，$\mathfrak{B} \models \varphi(b_0, b_1, \ldots) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(b_0, b_1, \ldots)$ が成り立つことである．

[*6] **Mostowski の崩壊補題 ([4] の定理 2.29)** E を集合 X 上の外延的で整順的な関係とする．このとき，推移的な集合 M と写像 $\pi : X \to M$ で，$\pi : \langle X, E \rangle \xrightarrow{\cong} \langle M, \in \rangle$ となるものが一意に存在する．

ここで，X 上の二項関係 E が**整順的**とは，X の任意の部分集合に E に関して極小元となるような要素が存在すること．X 上の二項関係 E が**外延的**とは，$\{u \in X : uEx\} = \{u \in X : uEy\} \to x = y$ がすべての $x, y \in X$ に対し成り立つことである．ここでの主張は，Mostowski の崩壊補題を $(M_0, \in)$ に適用することで得られる．$M_0 \models$ “外延性公理” により，$\in$ は M_0 上外延的であることに注意する．

[*7] 強制法の細部は，主に Kunen [7] に従っている．$\mathbb{P}$-名称にドットをつける記法は（多分） Baumgartner [1] で導入されたものである．

[*8] $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ が擬順序とは，$\leq_{\mathbb{P}}$ が反射律と推移律を満たすことである．つまり，すべての p, q, $r \in \mathbb{P}$ に対し，$p \leq_{\mathbb{P}} p$, $p \leq_{\mathbb{P}} q \wedge q \leq_{\mathbb{P}} r \to p \leq_{\mathbb{P}} r$ が成立することである．

(1) $x \in V^{\mathbb{P}} \Leftrightarrow$ すべての $y \in x$ に対し，$z \in V^{\mathbb{P}}$ と $p \in \mathbb{P}$ で，$y = \langle z, p\rangle$ となるものがとれる[*9]．

M を ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとする．$\mathbb{P} \in M$ で $M \models$ “$\mathbb{P}$ は poset である” とする[*10]．特に，ここでの「ZFC の十分に大きな有限部分」は上のような $V^{\mathbb{P}}$ の再帰的定義に必要な ZFC の公理をすべて含んでいるとする．このとき，$(V^{\mathbb{P}})^M$ を[*12]，$M^{\mathbb{P}}$ とあらわす．$V^{\mathbb{P}}$ の定義から，$M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$ である．

$V^{\mathbb{P}}$（$M^{\mathbb{P}}$）の要素を **$\mathbb{P}$-名称**（**$\mathbb{P}$-name**）とよぶ．$\mathbb{P}$-名称はドットつきの記号 $\dot{a}, \dot{b}, \dot{x}$ などであらわすことにする[*13]．

$\mathbb{P}$ を poset とするとき，$p, q \in \mathbb{P}$ が **共存可能** (**compatible**) とは，$r \in \mathbb{P}$ で $r \leq_{\mathbb{P}} p, q$ となるものが存在すること．共存可能でないとき **共存不可能** (**incompatible**) であるという．

$G \subseteq \mathbb{P}$ が G（上の）**フィルター** (**filter**) であるとは，

(2) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in G$ で，G は上方向に閉じている[*14]．

(3) $p, q \in G$ なら，p と q は共存可能で，$r \in G$ で，$r \leq_G p, q$ となるものが存在する．

[*9] このような $V^{\mathbb{P}}$ を構成するには，たとえば，$\alpha \in \mathrm{On}$ に対する帰納法で，$V^{\mathbb{P}} \cap V_\alpha$ を定義してゆけばよい．

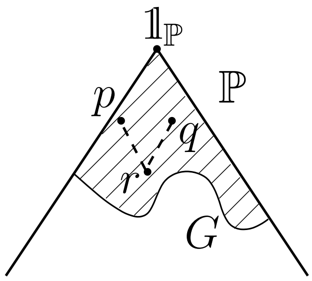
[*10] 実は，“$\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ は poset” は Δ_0-論理式で表現できるので[*11]，この条件は，$\mathbb{P}$ が（V で本当に） poset である，ということと同値である．

[*11] Δ_0-論理式と，その推移的なモデルでの絶対性については，[4] の補題 3.3 の前後を参照．

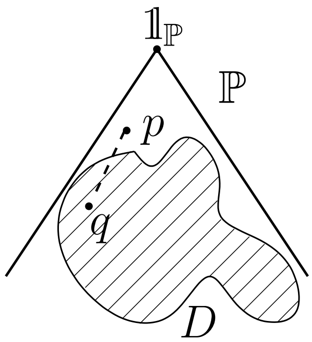
[*12] S をクラスとして S は（パラメタを含む）論理式 $\varphi(x)$ により，$S = \{x : \varphi(x)\}$ として導入されている，とする．M を，$\varphi(x)$ のパラメタを含んでいる，(ZFC の十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとするとき，$S^M = \{x \in M : M \models \varphi(x)\}$ である．

[*13] 下つきティルデのついた記号 $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{x}$ などを $\mathbb{P}$-名称に用いる（S. Shelah の）流儀もある．

[*14] つまり，$q \in G$ で $q \leq_G p$ なら，常に $p \in G$ となる．



$\mathbb{P}$ を poset とするとき，$D \subseteq \mathbb{P}$ が**稠密**（**dense**）とは，すべての $p \in \mathbb{P}$ に対し，$q \in D$ で $q \leq_{\mathbb{P}} p$ となるものが存在することとする．



M を ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとして[*15]，$\mathbb{P} \in M$，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は poset" とする．このとき G が $(M, \mathbb{P})$**-generic 集合** とは，

(4)　G の任意の 2 つの元は共存可能である．

(5)　$D \in M$ で $M \models$ "D は $\mathbb{P}$ で稠密" なら，$D \cap G \neq \emptyset$ である．

G が，$(M, \mathbb{P})$-generic 集合で，$\mathbb{P}$ で上方向に閉じているとき[*16]，G は $(M, \mathbb{P})$**-generic フィルター** であるという[*17]．

補題 2　G が $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターなら G はフィルターである．

証明. G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．G が (2) を満たすことは，generic フィルターの定義によりよい．したがって，G が (3) を満たすこと

[*15] 以下の議論では M と書いたときには，M は，常に ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとなっているとする．"十分に" は，文脈によって異なる意味を持つが，それについては，毎回は注意しない．

[*16] つまり，すべての $p \in G$ に対し，$q \in \mathbb{P} \cap M$ で $p \leq_{\mathbb{P}} q$ なら，$q \in G$ である，ということであるが，M は推移的なので，"$q \in \mathbb{P} \cap M$" という条件は，ここでは $q \in \mathbb{P}$ と同値である．

[*17] 定義から，G が $(M, \mathbb{P})$-generic set なら，$G' = \{p \in \mathbb{P} :$ ある $q \in G$ に対し,$q \leq_{\mathbb{P}} p\}$ は $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターになることがわかる．

を確かめればよい．

$x, y \in G$ として，M の中で，

$$D = \{r \in \mathbb{P} : r \leq_{\mathbb{P}} x, y \text{ であるか，または，} \\ r \text{ は } x \text{ か } y \text{ のうちの少なくとも1つと共存不可能}\}$$

とすると，$D \in M$ で，$M \models$ "D は $\mathbb{P}$ の稠密部分集合である" が成り立つ[*18]．

したがって，G が $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターであることから，$G \cap D \neq \emptyset$ となる．$r \in G \cap D$ とすると，(4) により，r は x とも y とも共存可能だから，D の定義から $r \leq_{\mathbb{P}} x, y$ である． □ (**補題 2**)

補題 3 M が可算なら，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対し，p を含む $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターが存在する．

証明. M を外からながめて議論する．

$\mathcal{D} = \{D \in M : M \models \text{“}D \text{ は稠密”}\}$ とすると，$\mathcal{D} \subseteq M$ だから（M の外から見たとき）$\mathcal{D}$ は可算である．そこで $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ と枚挙する[*19]．

各 D_n が $\mathbb{P}$ で稠密であることから，$\mathbb{P}$ の要素の下降列

$$\cdots \leq_{\mathbb{P}} p_{n+1} \leq_{\mathbb{P}} p_n \leq_{\mathbb{P}} \cdots \leq_{\mathbb{P}} p_2 \leq_{\mathbb{P}} p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_0 = p$$

で，すべての $n \in \omega$ に対し，$p_{n+1} \in D_n$ となるようなものがとれる．このとき $G = \{p_n : n \in \omega\}$ は $(M, \mathbb{P})$-generic 集合である．

したがって，$G' = \{p : \text{ある } q \in G \text{ に対し } q \leq_{\mathbb{P}} p\}$ は $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとなる． □ (**補題 3**)

[*18] M の中で議論する．$u \in \mathbb{P}$ を任意にとる，もし $r \leq_{\mathbb{P}} u$ で，x か y のうちの少なくとも 1 つと共存不可能なものがとれるなら，$r \in D$ である．そのようなものがなければ，特に u は x と共存可能だから，$r' \leq_{\mathbb{P}} u$ で $r' \leq_{\mathbb{P}} x$ となるものがとれる．仮定から r' は y と共存可能だから，$r \leq_{\mathbb{P}} r'$ で $r \leq_{\mathbb{P}} y$ となるものがとれる．このとき，$r \leq_{\mathbb{P}} x, y$ だから，$r \in D$ である．

[*19] もちろん，この枚挙は，一般には M の外で行われている．

後に出てくる具体的な $\mathbb{P}$ に対する $(M,\mathbb{P})$-generic 集合 G の構成では，常に $G \notin M$ となる．これは，以下の補題による:

補題 4 $\mathbb{P}$ が

(6) すべての $p \in \mathbb{P}$ に対し，互いに共存不可能な $q, q' \leq_{\mathbb{P}} p$ が存在する．

を満たすとき，任意の $(M,\mathbb{P})$-generic 集合 G は M の要素でない．

証明. $G \in M$ と仮定して矛盾を示す．

$G \in M$ とすると，$D = \mathbb{P} \setminus G$ も M の要素である[*20]．

(6) により D は $\mathbb{P}$ の稠密な部分集合になる[*21]．

したがって，G の generic 性から，$D \cap G \neq \emptyset$ となならなくてはならない．

これは矛盾である． □ **(補題 4)**

$\mathbb{P}$ を poset として，G を $\mathbb{P}$ 上のフィルターとする．$\mathbb{P}$-name $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ に対し，**$\dot{x}$ の G による解釈** $\dot{x}^G$ を次のようにして再帰的に定義する[*22]:

(7) $\dot{x}^G = \{\dot{u}^G : \text{ある } p \in G \text{ に対し，} \langle \dot{u}, p\rangle \in \dot{x}\}$.

M を ZFC の十分に大きな有限部分の推移的なモデルとして，$\mathbb{P} \in M$ を poset とし，G を $(M,\mathbb{P})$-generic フィルターとする．このとき，

$$\mathbf{M[G]} = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}$$

[*20] これは，M が ZFC の十分に大きな有限部分のモデルになっていること，と，M での意味の $\mathbb{P} \setminus G$ が（もし存在すれば）M の外で満たときの $\mathbb{P} \setminus G$ と一致することによる．

[*21] $p \in \mathbb{P}$ とすると，(6) により 互いに共存不可能な $q, q' \leq_{\mathbb{P}} p$ が存在する．q と q' の両方が G に入ることはありえないから，たとえば $q \notin G$ とすれば，$q \leq_{\mathbb{P}} p$ で，$q \in D$ である．

[*22] $rank(x) = \mu x(x \in V_{\alpha+1})$ に関する（超限）帰納的定義により構成すればよい．このような帰納的構成法や $rank$ に関する帰納法を，以降 "$\in$-induction", "$\in$ に関する帰納法" などとよぶことにする．

すとる．$M[G]$ は M の G による **generic-拡大**とよばれる．
以下の補題 5, 補題 6, 補題 7で示される $M[G]$ の基本性質は，p.2 にあるようなポンチ絵に表現できる．

補題 5 $M \subseteq M[G]$ で，$G \in M[G]$ である．

証明. 各集合 x に対し，x の標準的な $\mathbb{P}$-名称 $\check{x}$ を次のように再帰的に定義する[*23]: $\check{x} = \{\langle \check{u}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle : u \in x\}$.
このとき,

(8) すべての $\mathbb{P}$ 上のフィルター G とすべての集合 x に対し，$\check{x}^G = x$ が成り立つ．

が，$\in$ に関する帰納法により示せる．
$x \in M$ なら，$\check{x} \in M$ だから[*24]，$x = \check{x}^G \in M[G]$ である．
$\mathbb{P}$ 上の generic-フィルターの標準的な $\mathbb{P}$-名称 $\check{G}$ を，$\check{G} = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$ と定義すると，$\check{G} \in M$ である[*24]．
(8) と $\mathbb{P}$-名称の解釈の定義から，$\check{G}^G = G$ となることがわかるので，$G = \check{G}^G \in M[G]$ である[*24]． □ (補題 5)

補題 6 $M[G]$ は推移的で，$\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$ である．

証明. $M[G]$ が推移的であることを示すために，$x \in M[G]$, $y \in x$ とする．
$x = \dot{x}^G$ となる $\dot{x} \in M$ があるが，$\dot{x}^G$ の定義から，ある，$\langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x}$ で $p \in G$

[*23] $\in$-induction による．

[*24] ここでも M が ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルである，という仮定が用いられている．

となるものに対し，$y = \dot{y}^G$ となる．M は推移的だから，$\dot{y} \in M$ である．したがって，$y = \dot{y}^G \in M[G]$ である．

$M[G]$ が推移的で，補題 5 により $M \subseteq M[G]$ であることから，$\mathrm{On}^M \subseteq \mathrm{On}^{M[G]}$ がわかる．

すべての $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ に対し，$rank(\dot{x}^G) \leq rank(\dot{x})$ となることが，$\in$ に関する帰納法により示せる．したがって，$\mathrm{On}^M \supseteq \mathrm{On}^{M[G]}$ である． □ **(補題 6)**

補題 7 N を $M \subseteq N$ で $G \in N$ となるような，ZFC の（十分に大きな有限部分の）推移的なモデルとするとき，$M[G] \subseteq N$ である．

証明. $\dot{x} \in M$ なら，$\dot{x}^G = (\dot{x}^G)^N \in N$ である． □ **(補題 7)**

generic 拡大を用いた相対的無矛盾性証明のアウトライン

ある数学的命題 φ が ZFC 上で相対的無矛盾[*25]であることを示すためには，次の (9), (10) が確立されれば十分である:

(9) Δ を任意の ZFC の有限部分とするとき，十分に大きな，有限な $\Gamma \subseteq$ ZFC をとれば，Γ の可算な推移的モデル M の（任意の poset $\mathbb{P} \in M$ による）generic 拡大 $M[G]$ は Δ のモデルとなる[*26]．

(10) ある定義によって規定される poset $\mathbb{P}$ を (9) でのような M でとるとき，任意の $(M, \mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi$ が常に成り立つ．

(9) と (10) から ZFC + φ の ZFC 上の相対的無矛盾性が得られることは，次

[*25] ある主張 φ が体系 ZFC 上で相対的無矛盾であるとは，“ZFC が無矛盾なら ZFC + φ も無矛盾である” という主張が（有限の立場で）証明できることである．ただし，ZFC + φ は体系 ZFC の公理の全体に φ (に対応する閉論理式）を付け加えて得られる体系のことである．

[*26] (9) は φ に依存しない強制法の一般的な事実である．

のようにして見ることができる:

ZFC$+\varphi$ が矛盾するとすると，ZFC の有限部分 Δ で，$\Delta+\varphi$ が矛盾するようなものがとれる．つまり，$\Delta\vdash\neg\varphi$ である．
一方，この Δ に対して，(9) でのような Γ をとり，Γ のモデルになっているような推移的な可算モデル M をとって，(10) でのような $\mathbb{P}\in M$ を用いて generic 拡大 $M[G]$ をとれば，$M[G]\models\varphi$ となるが，(9) により，$M[G]\models\Delta$ なので，$M[G]\models\neg\varphi$ である．これは矛盾である．

ここでの議論により,「ZFC$+\varphi$ が矛盾するとすると，そのことを示す証明 $\mathcal{P}$ から，ZFC の矛盾を示す証明 $\mathcal{P}'$ が作れる」ことがわかる．つまり,「ZFC が矛盾しなければ ZFC$+\varphi$ も矛盾しない」ことが示せたことになる[*27]．

(9) と (10) の確立のためには，これらより若干すっきりとした形をしている，次の (9') と (10') の証明が得られれば十分である[*29]:

(9') 任意の ZFC の可算な推移的モデル M の（任意の poset $\mathbb{P}\in M$ による）generic 拡大 $M[G]$ は ZFC のモデルとなる[*30]．

(10') ある定義によって規定される poset $\mathbb{P}$ を，ZFC の可算な推移的モデル M でとるとき，任意の $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G]\models\varphi$ が常に成り立つ[*31]．

[*27] ここで，(9) と (10) の証明が具体的に得られれば，$\mathbb{P}$ から $\mathbb{P}'$ への変形も（原理的には[*28]）具体的な手続きとして与えることができる，したがって，ここでの相対的無矛盾性の証明は純粋に有限の立場でのそれである．

[*28] つまり，証明を実際に形式的な体系で (machine-readable な形で) 書きだすことをしたとすれば．

[*29] (9') と (10') から (9) と (10) が導けることは，次の事実を思い出せば明らかである: ある理論 T から命題 φ が証明されているとには，φ の T からの証明 P が具体的に与えられているわけだが，$\mathbb{P}$ は記号列の有限の集まりなので，T の公理のうち P にあらわれるものは有限個しかない．それらを集めたものを T' とすれば P は φ の T' からの証明でもある．

[*30] (9') は，ZFC の一つ一つの公理 ψ に対して "$\cdots$ $M[G]$ は ψ のモデルとなる" を主張している定理を集めた meta theorem である．

[*31] ここでも，(10') では，φ が与えられるごとに,「ある定義」をうまく設定して，それを満たす $\mathcal{P}$ に対する対応する主張の証

(9') と (10') の証明には，強制関係（forcing relation; 記号: $\Vdash$ “ $\cdots$ ”）とよばれる，以下で導入される ZFC で定義可能な関係（の族）が用いられる．

強制関係

$\mathcal{L}_\in$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ ごとに，poset $\mathbb{P}$, $p \in \mathbb{P}$ と $\mathbb{P}$-名称 $\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1}$ に対し，$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$” （が成り立つ[*32]）という述語 —— **強制関係 (forcing relation)** を（φ の構成に関する帰納法により[*33]）以下のようにして定義する．

ここで目標としているのは，$\cdot \Vdash_\cdot$ “$\varphi(\cdot, ..., \cdot)$” が各 φ ごとに実際に定義でき，定理 10 が成り立つことである[*34]．

まず，φ が $x_0 = x_1$ の場合について，強制関係を再帰的に定義する．

(11) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{a}_0 = \dot{a}_1$” $\Leftrightarrow$

(α) すべての $\langle \dot{b}_0, p_0 \rangle \in \dot{a}_0$ に対し，
$\{q \leq_{\mathbb{P}} p : \exists \langle \dot{b}_1, p_1 \rangle \in \dot{a}_1\ (q \leq_{\mathbb{P}} p_1 \ \wedge\ q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{b}_0 = \dot{b}_1\text{”})\}$
は p 以下で稠密となり[*35]，かつ，

(β) すべての $\langle \dot{b}_1, p_1 \rangle \in \dot{a}_1$ に対し，
$\{q \leq_{\mathbb{P}} p : \exists \langle \dot{b}_0, p_0 \rangle \in \dot{a}_0\ (q \leq_{\mathbb{P}} p_0 \ \wedge\ q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{b}_0 = \dot{b}_1\text{”})\}$
は p 以下で稠密となる[*35]ことである．

(11) は，（$\mathbb{P}$ ごとに） $V^{\mathbb{P}} \times V^{\mathbb{P}}$ 上の整順的な関係

$$\langle \dot{a}_0, \dot{b}_0 \rangle \ R\ \langle \dot{a}_1, \dot{b}_1 \rangle \ \Leftrightarrow$$

明を，個別に見つける必要がある．

[*32] “p forces $\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$” あるいは，“$p$ は（が）$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$ を force する” などと読み下される．

[*33] ここでの φ の構成に関する帰納法は集合論の体系の外側の（ meta の）レベルで行われていることに注意する．

[*34] ここでは $V^{\mathbb{P}}$ や $V[G]$ の定義や $\cdot \Vdash_\cdot$ “$\varphi(\cdot, ..., \cdot)$” の定義は Kunen [7] に従っているが，定理 10 などの基本性質が成り立つ限りにおいては，別の定義を採用してもかまわない．むしろ，$V^{\mathbb{P}}$ や $\cdot \Vdash_\cdot$ “$\varphi(\cdot, ..., \cdot)$” の構成法は隠しておき，これらの満たすべき性質から axiomatic に強制法を導入した方がエレガントとも言える．しかし，実際には，これらのからくりを 1 つ固定しておき，それも活用して議論する，という “泥臭い” やり方の方が，小回りのきく議論ができる場合も多いように思える．

[*35] $D \subseteq \mathbb{P}$ が $p \in \mathbb{P}$ 以下で稠密とは，すべての $q \leq_{\mathbb{P}} p$ に対し，$r \in D$ で $r \leq_{\mathbb{P}} q$ となるものが存在することである．

$$\text{ある } r \in \mathbb{P} \text{ に対し } \langle \dot{a}_0, r\rangle \in \dot{a}_1 \text{ かつ，ある } s \in \mathbb{P} \text{ に対し } \langle \dot{b}_0, s\rangle \in \dot{b}_1$$

に関する超限帰納法で定義することができる.

(12) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{a}_0 \in \dot{a}_1$" $\Leftrightarrow$
$\{q \in \mathbb{P} : \exists \langle \dot{b}, r\rangle \in \dot{a}_1\ (q \leq_{\mathbb{P}} r\ \wedge\ q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{b} = \dot{a}_0$"$)\}$ は p 以下で稠密.

(13) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1}) \wedge \psi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" $\Leftrightarrow$
$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" かつ $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\psi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"

(14) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\neg\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" $\Leftrightarrow$
どの $q \leq_{\mathbb{P}} p$ に対しても $q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" とならない

(15) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists x_0 \varphi(x_0, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{n-1})$" $\Leftrightarrow$
$\{r \in \mathbb{P} : \exists \dot{a}_0 \in V^{\mathbb{P}}(r \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"$)\}$ は p 以下で稠密.

次の補題は $\cdot \Vdash_{\cdot}$ "$\varphi(\cdot, \ldots, \cdot)$" の定義から容易に導ける:

補題 8 (Lemma 3.4 in Ch.VII of Kunen [7]) 次は同値である:

(a) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$".

(b) $\forall r \leq_{\mathbb{P}} p\ (r \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"$)$.

(c) $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$"$\}$ は p 以下で稠密.

定理 9 (Theorem 3.5 in Ch.VII of Kunen [7]) $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，M を推移的な ZFC のモデルとし（可算でなくてもよい），$\mathbb{P}$ を poset で $\mathbb{P} \in M$ となるものとし，$\dot{a}_0,...,\dot{a}_{n-1} \in M^{\mathbb{P}}$ とする．G を $(M,\mathbb{P})$-generic フィルターとするとき，次が成り立つ:

(i) $p \in G$ で $M \models$ “$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$” ” なら，
$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$ である．

(ii) $M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$ なら，
$p \in G$ で $M \models$ “$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$” ” となるものが存在する．

補題 3 と 定理 9 から次が導かれる:

定理 10 (Theorem 3.6 in Ch.VII of Kunen [7]) $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}_\in$-論理式として，M を可算で推移的な ZFC のモデルとし，$\mathbb{P}$ を poset で $\mathbb{P} \in M$ となるものとし，$\dot{a}_0,...,\dot{a}_{n-1} \in M^{\mathbb{P}}$ とする．このとき次が成り立つ:

(i) $M \models$ “$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$” ” $\Leftrightarrow$
すべての p を含む $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，
$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$.

(ii) すべての $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G^* に対し，
$M[G^*] \models \varphi((\dot{a}_0)^{G^*}, ..., (\dot{a}_{n-1})^{G^*})$ $\Leftrightarrow$
ある $p \in G^*$ に対し， すべての p を含む $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$ が成り立つ．

定理 10, (i) から，特に

(16) $M \models$ “$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, ..., \dot{a}_{n-1})$” ” $\Leftrightarrow$
すべての $(M,\mathbb{P})$-generic フィルター G に対し，
$M[G] \models \varphi((\dot{a}_0)^G, ..., (\dot{a}_{n-1})^G)$.

となることがわかる．

そこで，$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \dots, \dot{a}_{n-1})$” を，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\varphi(\dot{a}_0, \dots, \dot{a}_{n-1})$” と略記して，“$\varphi(\dot{a}_0, \dots, \dot{a}_{n-1})$ は（が） $\mathbb{P}$ で force される” と読み下すことにする．

$M[G]$ は ZFC のモデルである

強制関係を用いることで次の定理が証明できる:

定理 11 (Theorem 4.2 in Ch.VII of Kunen [7]) M を 推移的な ZFC のモデルとする．$\mathbb{P} \in M$ を poset として，G を (M, G)-generic フィルターとするとき，$M[G] \models \psi$ がすべての ZFC の公理 ψ に対して成り立つ[*36]．

$M[G]$ での基数

M を可算で推移的な ZFC のモデルとして，$\mathbb{P} \in M$ を poset とし，G を $(M, \mathbb{P})$-generic とする．

補題 6 により，$\mathrm{On}^{M[G]} = \mathrm{On}^M$ だから，$\mathrm{Card}^{M[G]} \subseteq \mathrm{Card}^M$ である．

ここで “$=$” は一般には成り立たない[*37]．

$\kappa \in \mathrm{Card}^M$ で，$M \models$ “ $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “κ は基数” ” が成り立つとき，$\mathbb{P}$ は基数 κ を保存する，という．$\mathbb{P}$ がどの基数を保存するかは，$M[G]$ の構造を知るために重要となる．

以下で $\mathbb{P}$ が基数を保存するための二種類の十分条件を考察する:

κ を基数とする．$\mathbb{P}$ が κ-閉鎖 (κ-closed) であるとは，長さが κ 未満の $\mathbb{P}$ 下降列が，すべて下限を持つことである．

ω_1-閉鎖は σ-閉鎖 (σ-closed) ともよばれる．

---

*36 ここでの “「すべての」は脚注 *30 でも注意したように，一つ一つの ψ に対しする，対応する定理が成り立つことの主張としての，超数学的 (matamathematical) な意味での「すべての」である．

*37 $M[G]$ には κ と κ より小さな基数の間の全単射が付けくわわっているかもしれないからである．

定理 12 (Corollary 6.15 in Ch.VII of Kunen [7] を参照) $M \models$ "κ は基数" として，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は κ-閉鎖" なら，$\mathbb{P}$ は κ より小さいか等しいすべての（M での）基数を保存する．

この定理は次の，より一般的な定理からただちに導ける:

定理 13 (Theorem 6.14 in Ch.VII of Kunen [7] を参照) $M \models$ "κ は基数" として，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は κ-閉鎖" とする．G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとするとき，$M[G]$ での長さが κ 未満の順序数の列はすべて M の元である[*38]．

$X \subseteq \mathbb{P}$ が反鎖 (antichain) であるとは，任意の異なる p, $q \in X$ が共存不可能であることである．

$\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ が κ-連鎖条件 (κ-chain condition) を満たすとは，$\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満のときである．

$\aleph_1$-連鎖条件は countable chain condition ともよばれ，c.c.c. または ccc と略記されることも多い．

定理 14 (Lemma 6.9 in Ch.VII of Kunen [7]) $M \models$ "κ は基数" として，$M \models$ "$\mathbb{P}$ は κ-連鎖条件を満たす" なら，$\mathbb{P}$ は，κ より大きいか等しい（M での）すべての基数を保存する．

Posets の典型的な例のうちのいくつか

κ を基数として，I, J を集合とし，$|I| \geq \kappa$ とする．

$$\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$$
$$= \{f : f \text{ は } I \text{ の濃度が } \kappa \text{ 未満の部分集合から } J \text{ への関数}\}$$

[*38] つまり $\mathbb{P}$ は長さが κ 未満の新しい順序数の列を M に付け加えない．

とする，

$f, g \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ に対し，

$$f \leq_{\mathrm{Fn}(I,J,\kappa)} g \ \Leftrightarrow\ f \supseteq g$$

とする[*39]．

特に，λ を基数として $I = \lambda \times \omega$, $J = 2 = \{0, 1\}$, $\kappa = \omega$ と置いたときの $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ を $\mathbb{C}_\lambda$ と表し，λ 個の実数を付加する コーエン poset とよぶ．

定理 15 (a) κ が正則基数なら $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ は κ-閉鎖である．
(b) (Lemma 6.10 in Ch.VII of Kunen [7]) $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ は $(|J|^{<\kappa})^+$-連鎖条件を満たす．

定理 16 M を可算で推移的な ZFC のモデルとする．

(a) $M \models$ “$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$” として，$G$ を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．このとき $\bigcup G$ は I から J への上射になる．

(b) $M \models$ “$\mathbb{P} = \mathbb{C}_\lambda$” として，$G$ を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．(a) から，$g = \bigcup G$ は $\lambda \times \omega$ から 2 への関数となる．$\alpha < \lambda$ に対し，$g_\alpha : \omega \to 2$ を $n \mapsto g(\alpha, n)$ で定義すると，$g_\alpha \in M[G]$ で g_α, $\alpha < \lambda$ は互いに異なる．

λ を基数として，

(17) $\mathbb{R}_\lambda = \{X : X \in Bor({}^{\lambda\times\omega}2),\ \mu(X) > 0\}$

とする．

ただし，${}^{\lambda\times\omega}2$ は $\kappa \times \omega$ から 2 への関数の全体で，これに 2 上の離散位相の積位相を入れて位相空間と考える[*40]．

---

*39 f と g が関数のときには，$f \subseteq g$ は，“関数 f は，関数 g の拡張になっている” という意味になることに注意する．

*40 集合 X, Y に対し ${}^XY$ で X から Y への関数の全体をあらわす．

また，位相空間 S に対し，$Bor(S)$ で S の Borel 集合の全体をあらわす．
μ は 2 上の canonical な測度の積測度として得られる $Bor({}^{\lambda\times\omega}2)$ 上の測度である．
$p, q \in \mathbb{R}_\lambda$ に対し，

$$q \leq_{\mathbb{R}_\lambda} p \;\Leftrightarrow\; q \subseteq p$$

とする．
$\mathbb{R}_\lambda$ は ランダム実数を side-by-side に λ 個付け加える poset である．

補題 17 (演習 17.3 in Kanamori [5]) $\mathbb{R}_\lambda$ は ccc を満たす．

補題 18 M を可算で推移的な ZFC のモデルとして，$M \models$ “$\mathbb{P} = \mathbb{R}_\lambda$” とし，$G$ を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとする．このとき，

(a) $\cap G$ は $\lambda \times \omega$ から 2 への関数となる．$\alpha < \lambda$ に対し，$g_\alpha : \omega \to 2$ を $n \mapsto g(\alpha, n)$ で定義すると，$g_\alpha \in M[G]$ で g_α, $\alpha < \lambda$ は互いに異なる．
(b) すべての $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G]}$ に対し[*40]，$g \in ({}^\omega\omega)^M$ で $f \leq g$ となるものが存在する．

最後に，ここで考察した posets の比較的簡単な応用 —— 連続体仮説の ZFC からの独立と，ω_1-スケールの存在の ZFC + ¬CH からの独立の証明 —— を見てみることにする．

連続体仮説

連続体仮説 (CH) は，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という命題だった．ここに $2^{\aleph_0}$ は，基数 $|\mathbb{R}| = |{}^\omega 2| = |{}^\omega\omega| = |\mathcal{P}(\omega)|$ である[*41]．

[*41] 連続体仮説に関しては，[2], [3] なども参考にされたい．

強制法を用いると CH の ZFC からの独立性が証明できる.

定理 19　M を可算で推移的な ZFC のモデルとする.
$M \models$ "$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2^{\aleph_0}, \aleph_1)$" として G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとすると，$M[G] \models \mathrm{CH}$ である．特に，CH は ZFC 上相対的無矛盾である.

証明. 定理 16, (a) により，
$M[G] \models (\aleph_1)^M = (2^{\aleph_0})^M \leq (\aleph_1)^{M[G]}$ である.
ところが，定理 15, (a) と 定理 13 により $({}^{\omega}\omega)^M = ({}^{\omega}\omega)^{M[G]}$ だから，
$M[G] \models \mathrm{CH}$ がわかる.　□ **(定理 19)**

定理 20　M を可算で推移的な ZFC のモデルとする.
$M \models$ "$\lambda \geq \aleph_2 \ \wedge \ \mathbb{P} = \mathbb{C}_\lambda$" として G を $(M, \mathbb{P})$-generic フィルターとすると，$M[G] \models \neg\mathrm{CH}$ である.
特に $\neg$CH は ZFC 上相対的無矛盾である.

証明. 定理 15, (a) により $\mathbb{P}$ は ccc を満たす．したがって，定理 14 により，$\mathbb{P}$ はすべての基数を保存する.
定理 16, (b) により，$M[G] \models$ "$|{}^{\omega}2| \geq \lambda$" だから，特に $M[G] \models \neg\mathrm{CH}$ である.　□ **(定理 20)**

定理 19 と定理 20 により，CH は ZFC 上独立であることが結論できる.

ω_1-スケールの存在

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ に対し，

$$f \leq^* g \ \Leftrightarrow \ \{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \text{ は有限集合である}$$

とする．$\leq^*$ は半順序となることが容易に確かめられる.

$\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ が ω_1-スケール であるとは，

(18)　$\mathcal{F}$ は $\leq^*$ によって，順序型 ω_1 に整列される．

(19)　すべての $f \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$g \in \mathcal{F}$ で $f \leq^* g$ となるものが存在する．

が成り立つことである．

補題 21　$S \subseteq {}^{\omega}\omega$ を可算とするとき，$f \in {}^{\omega}\omega$ で，$g \leq^* f$ がすべての $g \in S$ に対し成り立つようなものが存在する．

証明. $S = \{g_n : n \in \omega\}$ と整列する．

$f(n) = \max\{g_0(n), \ldots g_n(n)\} + 1$ として f を定義すれば，これが求めるようなものである．　□ **(補題 21)**

定理 22　CH のもとで ω_1-スケールが存在する．

証明. ${}^{\omega}\omega = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙する．これは CH により可能である．

ここで，$f_\alpha \in {}^{\omega}\omega$ を帰納的に，

(20)　すべての $\beta < \alpha$ に対し $f_\beta \leq^* f_\alpha$

(21)　$g_\alpha \leq^* f_\alpha$

となるようにとってゆく．これは，補題 21 により可能である．

$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が求めるようなものである．　□ **(定理 22)**

定理 23 M を可算で推移的な ZFC のモデルとする．

$M \models$ “$\lambda \geq \aleph_2 \ \wedge \ \mathbb{P} = \mathbb{C}_\lambda$” として G を $(M, \mathbb{P})$-*generic* フィルターとすると，$M[G] \models$ “ω_1-スケールは存在しない” が成り立つ．

証明. $I \subseteq \lambda$ に対し，$\mathbb{C}_I = \mathrm{Fn}(I \times \omega, 2, \omega)$ とあらわすことにする．

$\mathcal{F} \in M[G]$ で $M[G] \models$ “$\mathcal{F}$ は ω_1-スケール” だったとして矛盾を示す．

M と $M[G]$ を行き来して議論する．

$\mathbb{C}_\lambda$ は ccc を満たすから，$|I| = \aleph_1$ となる $I \subseteq \lambda$ で，$G_I = G \cap \mathbb{C}_I$ としたときに $\mathcal{F} \in M[G_I]$ となるようなものが存在する．

$\alpha \in \lambda \setminus I$ として $g_\alpha : \omega \to 2$ を，定理 16, (b) でのようにとり，$h : \omega \to \omega$ を $(g_\alpha)^{-1}{''}\{1\}$ を 下から順に枚挙するような関数とする．このとき，どの $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G_I]}$ に対しても $h \not\leq^* f$ となることが示せるが，これは矛盾である．

□ **(定理 23)**

定理 24 M を可算で推移的な ZFC + CH のモデルとする．
$M \models$ “$\lambda \geq \aleph_2 \ \wedge \ \mathbb{P} = \mathbb{R}_\lambda$” として G を $(M, \mathbb{P})$-*generic* フィルターとすると，$M[G] \models$ “$\neg$CH $\ \wedge\ $ ω_1-スケールが存在する” が成り立つ．

証明. 補題 17 により，$\mathbb{P}$ はすべての基数を保存する．したがって，補題 18 (a) により，$M[G] \models \neg$CH である．補題 22 により M には ω_1-スケールが存在するが，補題 18, (b) により，この ω_1-スケールは $V[G]$ でも ω_1-スケールになっている．

□ **(定理 24)**

系 25 “ω_1-スケールが存在する” は ZFC + $\neg$CH から独立である．

参考文献

[1] J.E. Baumgartner, Iterated forcing, In: A.R.D. Mathias (ed.), *Surveys in Set Theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series #87. Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

[2] 渕野 昌，Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から —，数学 (Sugaku), Vol.56, No.3 (2004), 248–259.

[3] 渕野 昌，連続体仮説とゲーデルの集合論的宇宙，現代思想，2007 年 2 月臨時増刊号 (2007), 94–116.

[4] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，“ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 4 巻，集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007) に第 I 部として収録.

[5] A. Kanamori, *Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Biginnings*, Springer-Verlag (1994/003). 日本語訳: 渕野 昌訳: 巨大基数の集合論，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[6] T. Jech, *Set theory, The Third Millennium Edition*, Springer-Verlag (2002).

[7] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Indepenence Proofs*, North-Holland (1980); 日本語訳: （藤田 宏 訳）（近刊）.

[8] 松原 洋，集合論の発展 — ゲーデルのプログラムの視点から，“ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 4 巻，集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007) に第 II 部として収録.