

* このノートで N は、向き付け可能で境界がトラスである 3次元多様体であると仮定しています。例えばカスプが1つの双曲 3次元多様体は N の内部と同相になります。 N の定義を書き忘れてしまったために、文章が読みにくくなってしまった事をお詫び申し上げます。

Finding ideal points from an ideal triangulation

蒲谷祐一

(東京工業大学理工学研究科数学専攻)

1 序

3次元多様体の基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現 (または $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現) の共役類のなす空間は character variety と呼ばれている。Culler-Shalen は character variety の ideal point に対応して incompressible surface が存在する事を示した [Cu-Sh]。この理論の応用として cyclic surgery theorem などの重要な定理が得られている [CGLS]。

Culler-Shalen の理論は非常に強力である一方、具体的な 3次元多様体に対してその理論を適用して incompressible surface を見つけるのは難しい。本稿では 3次元多様体の理想四面体分割 (ideal triangulation) を用いて ideal point を発見する方法について解説する。応用として結び目の補空間の boundary slope の計算例をあげる。

2 Character variety

N をコンパクトで向き付け可能な 3次元多様体とする。 $R(N)$ を $\pi_1(N)$ の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現全体の空間とする。(Culler-Shalen 理論においては $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現を考えることが多いが本稿では $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の空間を考える。Culler-Shalen の理論は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の場合と同様に成り立つ [Bo-Za].) $R(N)$ には共役 $\rho \mapsto g^{-1}\rho g$ をとることにより $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が作用する。 $R(N)$ の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 作用による商空間 $X(N)$ は character variety と呼ばれている。この空間は $\mathbb{C}[R(N)]^{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})}$ ($R(N)$ の座標環の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ で不変な元) の定める代数的集合として実現される。 $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して character の 2乗 $\rho \mapsto (\mathrm{tr}(\rho(\gamma)))^2$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ による共役で不変なので $\mathbb{C}[R(N)]^{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})}$ の元である。これを τ_γ と書く。 $\mathbb{C}[R(N)]^{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})}$ は τ_γ によって生成されることが知られている [Cu-Sh], [He-Po] (故に character variety と呼ばれる)。3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 の向きを保つ isometry は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ と同形である。そのため N が双曲多様体であるときには $X(N)$ は離散忠実表現 $[\rho_0]$ を含む。 $[\rho_0]$ を含む component はアファイン代数曲線になることが知られている。

3 Ideal points

C をアファイン代数曲線とする. C をコンパクト化して smooth にしたものを \tilde{C} とかく. $\phi: \tilde{C} \rightarrow C$ を双有理写像とすると $\tilde{C} - \phi(C)$ を ideal point と呼ぶ. 直感的には ideal point とは C の極限の点である. $\mathbb{C}[C]$ を C の関数環, $\mathbb{C}(C)$ をその商体とする. \tilde{C} の点 x に対して x における order をはかることよって discrete valuation $v: \mathbb{C}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$ が対応することが分かる. v は $v(x_1 x_2) = v(x_1) + v(x_2)$, $v(x_1 + x_2) \geq \min(v(x_1), v(x_2))$ をみたす. とくに ideal point に対応する valuation はある $f \in \mathbb{C}[C]$ について $v(f) < 0$ をみたす.

以下 character variety の ideal point について述べる. このとき ideal point は基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の “極限” と解釈できる. ideal point に対応する valuation を v とすると, ある $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して $v(\tau_\gamma) < 0$ が成立する. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現が双曲構造からくる場合には $(\mathrm{tr}(\gamma))^2$ は γ の長さに関係することを考えると, $v(\tau_\gamma)$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現が ideal point に近づくときの γ の長さの発散の order を測っていると解釈できる. Culler-Shalen は ideal point に対応して $\pi_1(N)$ の tree への作用を構成しその dual として N の incompressible surface が存在することが示した [Cu-Sh]. ideal point に対応する valuation を v とすると $v(\tau_\gamma) \geq 0$ となる基本群の元 γ は対応する incompressible surface と交わらないことがわかる.

ある $\gamma \in \pi_1(\partial N)$ について $v(\tau_\gamma) < 0$ であるとする. このとき対応する incompressible surface は境界を持つことがわかる. このときある δ で $v(\tau_\delta) = 0$ となるものが存在し, δ は incompressible surface の boundary slope となる.

3.1 A-polynomial

一般に ideal point を求めることは難しい. 理由の一つとして $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現を扱いやすい形でパラメライズする方法がないからである. しかしながら A 多項式という 2 変数多項式から ideal point を求める方法が存在する. $\partial N \rightarrow N$ は表現の間の写像 $X(N) \rightarrow X(\partial N)$ を定める. 境界はトラスであるため境界の基本群の表現は生成元の固有値の値によって記述できる. そのため ~~$X(N)$~~ はほぼ $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ と同一視できる. $X(N)$ の $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ での像は一般に 1 次元であり 2 変数多項式 $A_M(L, M)$ を定める. これは A 多項式と呼ばれている [CCGLS]. $A_M(M, L) = \sum a_{ij} M^i L^j$ としたとき $\{(i, j) | a_{ij} \neq 0\}$ の \mathbb{R}^2 での凸集合をとったものは Newton 多角形と呼ばれている. この Newton 多角形の各辺に対応して ideal point が存在する [CCGLS]. さらに対応する incompressible surface の boundary slope は Newton 多角形の辺の傾きに等しいことも示されている.

このように A 多項式が分かっしまえば character variety の ideal point は簡単に見つけることができる。しかしながら A 多項式の計算は非常に難しい。また character variety の情報を境界の表現に制限していることから一般には character variety より情報が減ってしまうことがありうる。

4 Ideal triangulation

$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) | t > 0\}$ を 3次元双曲空間とする。 $\mathbb{C}P^1$ は \mathbb{H}^3 の無限遠点と見なせる。 $\mathbb{C}P^1$ の異なる 4 点の \mathbb{H}^3 での凸包を理想四面体 (ideal tetrahedron) と呼ぶ。以下、理想四面体には向きが指定されているものとする。 $(z_1, z_2, z_3, z_4) (z_i \in \mathbb{C}P^1, z_i \neq z_j (i \neq j))$ を理想四面体の頂点とする。理想四面体の辺 (z_1, z_2) に対して $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}$ と定めることで理想四面体をパラメトライズする事ができる。ここで $(1, 2, 3, 4)$ は理想四面体の向きと一致する順にとる。 $z_i \neq z_j (i \neq j)$ よりこのパラメータは 0, 1 にはならない。また $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ に対して $[gz_1 : gz_2 : gz_3 : gz_4] = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ が成立する。定義から (z_1, z_2) と (z_3, z_4) のパラメータは一致することがわかる。 (z_1, z_2) のパラメータを z とすると (z_1, z_4) , (z_2, z_3) のパラメータは $\frac{1}{1-z}$, (z_1, z_3) , (z_2, z_4) のパラメータは $1 - \frac{1}{z}$ になる。

K を 3 単体の有限集合を各 3 単体の境界の 2 単体をペアで張り合わせたものとする。 $K^{(i)}$ を K の i -skeleton, $N(K^{(0)})$ を 0-skeleton の近傍とする。 $K - N(K^{(0)})$ が \mathbb{R}^3 に同相であるとき、 K は N の (位相的) 理想四面体分割 (ideal triangulation) であると言う。理想四面体分割とは N の境界で cone をとり、cone の頂点が K の唯一つの頂点になるように 3 角形分割を与えたものとも言い換えられる。

n を K の 3 単体の個数とする。 K の各 3 単体に理想四面体の構造を入れる。各理想四面体のパラメータを z_k とし、各理想四面体を $\Delta(z_k)$ で表す。(実際には z_k は理想四面体の辺の選び方に依存するが簡単のため省略する。) e_i を K の辺とする。 N の Euler 数は 0 であるので辺は n 本ある事が分かる。 e_i を共有する理想四面体の辺のパラメータは z_k , $\frac{1}{1-z_k}$, $1 - \frac{1}{z_k}$ のいずれかである。そこで e_i を共有する辺の複素パラメータをすべて掛け合わせると、

$$R_i = \prod_{k=1}^n z_k^{p_{i,k}} \left(\frac{1}{1-z_k} \right)^{p'_{i,k}} \left(1 - \frac{1}{z_k} \right)^{p''_{i,k}} = \prod_{k=1}^n (-1)^{p''_{i,k}} z_k^{r'_{i,k}} (1-z_k)^{r''_{i,k}}$$

$$(r'_{i,k} = p_{i,k} - p'_{i,k}, \quad r''_{i,k} = p''_{i,k} - p'_{i,k} \quad (i = 1, \dots, n))$$
(4.1)

とかける。これらの方程式は gluing equation と呼ばれる。各理想四面

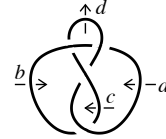
体のパラメータは対辺で同じであることと $z_k(\frac{1}{1-z_k})(1 - \frac{1}{z_k}) = -1$ より $R_1 R_2 \dots R_n = 1$ が成立する. よって本質的に $n - 1$ 個の gluing equation のみを考えればよい. K に対して *deformation variety* を次のように定義する.

$$\mathcal{D}(N, K) = \{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C} - \{0, 1\})^n \mid R_1(z) = 1, \dots, R_{n-1}(z) = 1\}. \quad (4.2)$$

以下 $\mathcal{D}(N, K)$ を $\mathcal{D}(N)$ と略す. $(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{D}(N)$ とする. $\Delta(z_1)$ を \mathbb{H}^3 に実現し $D(\Delta(z_1)) \subset \mathbb{H}^3$ とする. 次に $\Delta(z_1)$ と隣り合っている理想四面体を \mathbb{H}^3 に $D(\Delta(z_1))$ に隣り合うように置く. これを繰り返すことにより developing map $D : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$ が構成できる. $\gamma \in \pi_1(N)$ に対し, $D(\gamma(\Delta(z_1))) = \rho(\gamma)D(\Delta(z_1))$ と ρ を定義すると ρ は基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現を与える. 初めの $D(\Delta(z_1))$ の置き方を変えると ρ は共役で変わるだけなので, $\phi : \mathcal{D}(N) \rightarrow X(N)$ が well-defined に定まる. さらにこの写像は代数的である事がわかる.

$R_i = 1$ は z_ν と $1 - z_\nu$ の積という簡明な表示を持っている. そこで $\mathcal{D}(N)$ の ideal point を調べることにより $X(N)$ の ideal point を見つける事にする.

例 4.1 N を 8 の字結び目の補空間とする. a, b, c, d を Wirtinger 表示の生成元とする. N は 2 つの理想四面体に分割できる. 各理想四面体のパラメータを x, y とおくと, gluing equation は



$$xy(1-x)(1-y) = 1$$

で与えられる. N の基本群は



$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 - 4_1) &\cong \langle a, b, c, d \mid bcb^{-1}d^{-1} = 1, cac^{-1}d^{-1} = 1, aca^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \\ &\cong \langle b, c \mid (c^{-1}bcb^{-1})c = b(c^{-1}bcb^{-1}) \rangle. \end{aligned}$$

という表示を持つ. $D(\Delta(x))$ を $(0, \infty, 1, x)$ の 4 点の凸包として \mathbb{H}^3 に置くと,

$$\rho(b) = \frac{\pm 1}{\sqrt{y(1-x)}} \begin{pmatrix} y(1-x) & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(c) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x(1-y)}} \begin{pmatrix} x(1-y) & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(x, y \in \mathbb{C} - \{0, 1\})$ は $xy(1-x)(1-y) = 1$ を満たす

という表現が得られる.

$\pi_1(\partial N)$ の生成元 \mathcal{M} , \mathcal{L} をとる. K の各理想四面体から頂点を切り取る
 ことにより ∂N には 3 角形分割の構造が入る. そこで \mathcal{M} , \mathcal{L} を ∂N の辺に
 横断的に交わるように選んでおく. \mathcal{M} が ∂N の辺を反時計回りに 
 回るとき z , 時計回りに  回るときに $1/z$ をかけたものを M と書
 く. 同様に L も定める. R_i のときと同様にこれらは z_k , $\frac{1}{1-z_k}$, $1 - \frac{1}{k}$ の
 積で書けるので

$$M = \pm \prod_{k=1}^n z_k^{m'_k} (1 - z_k)^{m''_k}, \quad L = \pm \prod_{k=1}^n z_k^{l'_k} (1 - z_k)^{l''_k} \quad (4.3)$$

と表すことができる. このとき ρ は適当に共役をとることにより

$$\rho(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} \sqrt{M} & * \\ 0 & \sqrt{M}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} \sqrt{L} & * \\ 0 & \sqrt{L}^{-1} \end{pmatrix}.$$

となるようにとれる. 特に $\tau_{\mathcal{M}} = M + M^{-1} + 2$ と $\tau_{\mathcal{L}} = L + L^{-1} + 2$ が
 成立する. 結び目の補空間のときには \mathcal{M} , \mathcal{L} としてメリディアンとロン
 ジチュードをとる事にする.

$\mathcal{D}(N)$ は n 変数の $n-1$ 個の方程式の表す代数的集合より $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}(N) \geq 1$
 である. とくに $\mathcal{D}(N)$ は代数曲線を含むので Culler-Shalen 理論が適用可
 能である.

5 主結果

この節では $\mathcal{D}(N)$ の ideal point の発見法を示す. $\mathcal{D}(N)$ の ideal point で
 は, ある理想四面体のパラメータ z_k が $1, 0, \infty$ のいずれかに収束する. v を
 $\mathcal{D}(N)$ の ideal point に対応した valuation とする. z_1, \dots, z_n は $\mathcal{D}(N)$ 上
 の関数だから $v(z_k)$ はある整数になる. $z_k \rightarrow 0$ のとき $v(z_k) > 0$, $z_k \rightarrow 1$
 のとき $v(1 - z_k)$, $z_k \rightarrow \infty$ のとき $v(z_k) = v(1 - z_k) < 0$ となる. また
 z_1, \dots, z_n は gluing equation を満たすので

$$0 = v(1) = v(R_i) = v\left(\prod_{k=1}^n z_k^{r'_{i,k}} (1 - z_k)^{r''_{i,k}}\right) = \sum_{k=1}^n (r'_{i,k} v(z_k) + r''_{i,k} v(1 - z_k))$$

を満たす. $\mathbf{v} = (-v(1 - z_1), v(z_1), \dots, -v(1 - z_n), v(z_n))$ とおくと

$$(r'_{i,1}, r''_{i,k}, \dots, r'_{i,n}, r''_{i,n}) \wedge \mathbf{v} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

を満たす. ここで $x = (x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$, $y = (y'_1, y''_1, \dots, y'_n, y''_n)$ 対
 して $x \wedge y = \sum_{k=1}^n (x'_k y''_k - x''_k y'_k)$ とした. (wedge 積を使うのは [Ne-Za] の

公式にあわせるため.) $\rho_1 = (1, 0), \rho_0 = (0, -1), \rho_\infty = (-1, 1)$ と置くと $\mathbf{v} = (a_1\rho_{i_1}, \dots, a_n\rho_{i_n})$ ($i_k = 1, 0, \infty, a_k \geq 0$) と書ける. $\rho_1, \rho_0, \rho_\infty$ はそれぞれ $z_k \rightarrow 0, z_k \rightarrow 1, z_k \rightarrow \infty$ の場合に対応する. valuation がこれらの式を満たす事は [Yo] で調べられている. そして実際に ideal point があるときの, 対応する incompressible surface の構成法が示されている. しかしこれらの式を満たすものが本当に ideal point から得られるかどうかは解っていなかった.

I を $I = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, 0, \infty\}^n$ で定義し *degeneration index* と呼ぶ. 前述したように degeneration index は各理想四面体の退化の仕方を表している. I に対し,

$$r(I)_{i,k} = \begin{cases} r''_{i,k} & (i_k = 1) \\ r'_{i,k} & (i_k = 0) \\ -r'_{i,k} - r''_{i,k} & (i_k = \infty). \end{cases}$$

と定義する. $r(I)_{i,k}$ は $z_k \rightarrow 1, 0$ または ∞ のときに, $R_i = \prod z_k^{r'_{i,k}} (1 - z_k)^{r''_{i,k}}$ に寄与する部分を取り出したものである. 次に

$$R(I) = \begin{pmatrix} r(I)_{1,1} & \dots & r(I)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ r(I)_{n-1,1} & \dots & r(I)_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

とし, さらに

$$d(I)_k = (-1)^{k+1} \det \begin{pmatrix} r(I)_{1,1} & \dots & \widehat{r(I)_{1,k}} & \dots & r(I)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r(I)_{n-1,1} & \dots & \widehat{r(I)_{n-1,k}} & \dots & r(I)_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき *degeneration vector* を次のように定義する.

$$d(I) = (d(I)_1, d(I)_2, \dots, d(I)_n) \quad (\in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n).$$

このとき $d(I)$ は

$$(r'_{i_1,1}, r''_{i_1,k}, \dots, r'_{i_1,n}, r''_{i_1,n}) \wedge (d(I)_1\rho_{i_1}, \dots, d(I)_n\rho_{i_n}) = 0$$

を満たすことが簡単な計算により解る. よって $d(I)_k \geq 0$ がすべての k に対して成立すれば $(d(I)_1\rho_{i_1}, \dots, d(I)_n\rho_{i_n})$ は valuation の満たすべき性質を満たしている事になる. ここで次の定理が成立する:

定理 5.1 ([Ka]) すべての $k = 1, \dots, n$ に対して $d(I)_k > 0$ (または, すべての $k = 1, \dots, n$ に対して $d(I)_k < 0$) ならば対応する ideal point は存在する. このとき $c = \gcd(d(I)_1, d(I)_2, \dots, d(I)_n)$ とすると $d(I)$ に対応する ideal point は c 個ある.

この定理で見つかる ideal point の valuation を v とすると, $v(z_k) = d(I)_k/c$ が成立する. z_k は $\mathcal{D}(N)$ 上の有理関数なので写像 $z_k : \mathcal{D}(N) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ と見なせる. このとき ideal point は z_k によって $i_k (= 0, 1, \infty)$ にうつされる. $d(I)_k/c = v(z_k)$ は ideal point における z_k の分岐の数と一致する.

定理の証明は $d(I)$ に対応した weighted projective space に $\mathcal{D}(N)$ を埋め込む事によって与えられる. このとき無限遠の divisor と $\mathcal{D}(N)$ を weighted projective space でコンパクト化したものとの交点が容易に計算でき, 実際に ideal point を構成できる.

最後に $\mathcal{D}(N)$ の ideal point と $X(N)$ の ideal point の関係について述べる. x を $\mathcal{D}(N)$ の ideal point とする. $\phi : \mathcal{D}(N) \rightarrow X(N)$ により $\phi(x)$ は $X(N)$ の点を与える事がわかる. これが $X(N)$ の ideal point に対応している事を確かめるには, ある $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して $v(\tau_\gamma) < 0$ である事を示せばよい (v は x に対応する valuation). そこで境界での基本群の元 \mathcal{M} , \mathcal{L} の $\tau_{\mathcal{M}}$, $\tau_{\mathcal{L}}$ について調べてみる. まず $\mathcal{D}(N)$ 上の関数 M , L について, v をとると (4.3) より

$$v(M) = \sum_{k=1}^n (m'_k v(z_k) + m''_k v(1 - z_k))$$

が成立する. 定理の注により $v(z_k)$, $v(1 - z_k)$ の値がすべて計算できるので $v(M)$ の値も計算できる ($v(L)$ も同様). ここで $v(M) \neq 0$ ならば $\tau_{\mathcal{M}} = M + M^{-1} + 2$ から $v(\tau_{\mathcal{M}}) < 0$ がわかる. よって $v(M) \neq 0$ または $v(L) \neq 0$ ならば $\phi(x)$ は $X(M)$ の ideal point であることがわかる. さらに [CCGLS] により $-v(L)/v(M)$ が対応する incompressible surface の boundary slope を与えている事がわかる.

6 例

この節では $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目に対して定理を適用する. 結び目の補空間の理想四面体分割は SnapPea[We] を用いて与える事ができる. また snap[Go] を用いると gluing equation を表示することができる. $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目の場合, 3つの理想四面体に分割できて gluing equation は

$$(1 - z_0)^{-2} z_1^{-1} z_2^{-1} = 1, \quad z_0(1 - z_1)(1 - z_2) = 1$$

で与えられる. また境界では

$$M = (1 - z_1)^{-1}(1 - z_2), \quad L = (1 - z_0)^{-2}(1 - z_1)^{18} z_2^{-2}(1 - z_2)^{-18}$$

となる. ここで定理の条件を満たす degeneration index を求めると図 1 になる.

degeneration indices	degeneration vectors	$(v(M), v(L))$	boundary slopes
$(\infty, 1, 0)$	$(1, 1, 2)$	$(1, -16)$	16
$(\infty, 0, 1)$	$-(1, 2, 1)$	$(-1, 16)$	16
$(1, \infty, 1)$	$(1, 2, 2)$	$(-4, 74)$	$37/2$
$(1, 1, \infty)$	$-(1, 2, 2)$	$(4, -74)$	$37/2$
$(0, \infty, 0)$	$-(1, 1, 1)$	$(-1, 20)$	20
$(0, 0, \infty)$	$(1, 1, 1)$	$(1, -20)$	20

図 1: $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot の ideal point.

7 応用

この節では主定理を用いて boundary slope を計算する. 結び目の補空間の boundary slope に関しては多くの研究がなされている. boundary slope 全体の集合は有限集合であることが知られている [Ha]. さらに Hatcher-Oertel により Montesinos 結び目の boundary slope を求めるアルゴリズムが知られている [Ha-Oe]. 特に 10 交点以下の結び目に対しては Dunfield により実際に boundary slope と incompressible surface の表が得られている [Du]. 一方 Montesinos 結び目でない結び目の boundary slope はほとんど知られていない. そこでここでは 10 交点以下の結び目のうち Dunfield の表 [Du] に載っていない結び目の boundary slope を計算する.

主定理により各 degeneration index ごとに degeneration vector を計算して定理を満たしているかどうかを確認すればよい. 基本的に行列式の計算だけなので簡単にプログラムを書くことができる. なんの工夫もせずに計算すると 3^n 個の degeneration index に対してそれぞれ degeneration vector を計算し, 定理の条件を満たすものを探せば良い. 現在の標準的なコンピュータであれば理想四面体の数が 15 個程度なら計算可能である. だいたい理想四面体の数が 10 個までなら数秒以内, 13 個なら 1 時間程度, 15 個なら半日くらいで計算できる. 結果を図 2 に示す. これらの結び目に対して A 多項式を求める事は相当困難である事を注意しておく. snap[Go] には 17 交点以下の結び目のデータが入っているのでそれを利用した. 10 交点以下の結び目のうち補空間が 15 個以下の理想四面体に分割可能な場合のみ計算した. この表に載っている boundary slope は boundary slope の一部であり全部を求めたものではないことを注意しておく. またどの結び目の補空間も Seifert 曲面による 0-slope をもつことも注意しておく.

トーラス上の単純閉曲線の集合は $\mathbb{Q} \cup 1/0$ と同一視できる. 結び目の補空間の boundary slope の間の差の最大値は diameter と呼ばれている. 交代結び目の場合 2 つの checker board 曲面が incompressible surface であることが知られていて, それらの boundary slope の間の距離は交点数の 2 倍に等しい. 交代 Montesinos 結び目の場合はこれらの checker board

曲面の間の距離が diameter を与える [Ic-Mi]. またすべての Montesinos 結び目の diameter は交点数の 2 倍以下である事も知られている [Ic-Mi]. 一方, 図 2 を見ると diameter が交点数の 2 倍以上あるものが多く存在することがわかる. このような例はこれまでに発見されていなかったようである.

また交代結び目の boundary slope でこれまでに知られているものは偶数となるものだけであった. (すべての有理数に対してある結び目が存在して boundary slope として与えられることは知られている.) 交代 Montesinos 結び目に関しては boundary slope は偶数であることがわかる. 一方, 図 2 を見ると交代結び目でも有理数の boundary slope を持つものがあるとわかる.

参考文献

- [Bo-Za] S. Boyer, X. Zhang, On Culler-Shalen seminorms and Dehn filling, *Ann. of Math. (2)* 148 (1998), no. 3, 737–801.
- [CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long, P. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, *Invent. Math.* 118 (1994), no. 1, 47–84.
- [CGLS] M. Culler, C. Gordon, J. Luecke, P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, *Ann. of Math. (2)* 125 (1987), no. 2, 237–300.
- [Cu-Sh] M. Culler, P. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, *Ann. of Math. (2)* 117 (1983), no. 1, 109–146.
- [Du] N. Dunfield, *A table of boundary slopes of Montesinos knots*, *Topology* 40 (2001), no. 2, 309–315.
- [Go] O. Goodman, *Snap*, computer program.
- [Ha] A. Hatcher, *On the boundary curves of incompressible surfaces*, *Pacific J. Math.* 99 (1982), no. 2, 373–377.
- [Ha-Oe] A. Hatcher, U. Oertel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, *Topology* 28 (1989), no. 4, 453–480.
- [He-Po] M. Heusener, J. Porti, *The variety of characters in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$* , *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)* 10 (2004), Special Issue, 221–237.

Alternating knots Non-alternating knots

knot	boundary slopes	knot	boundary slopes
8 ₁₆	2, 6, 16	9 ₄₇	16
8 ₁₇	-14, 2, 14	9 ₄₉	15
8 ₁₈	-14, 14	10 ₁₄₈	-8/3, 8
9 ₃₂	8, 14, 18, 24	10 ₁₄₉	-22, -12, -14/3, 1
9 ₃₃	-22	10 ₁₅₀	2, 7, 18
9 ₃₄	-22, -16	10 ₁₅₁	-12, -4, 5
9 ₃₉	-10, 20	10 ₁₅₂	-22
9 ₄₁	-4, -2, 8	10 ₁₅₃	-12, -10, 10
10 ₇₉	-10/3, 0, 10/3, 6	10 ₁₅₄	-2, 10, 15/2
10 ₈₀	-13, -8, -20/3, -2	10 ₁₅₅	-10, -9/2, -1
10 ₈₂	-13, -12, 2, 6, 14	10 ₁₅₆	-16, -32/3, -7, 12
10 ₈₃	30	10 ₁₅₇	3, 12, 22
10 ₈₅	-20, -15, -14, -2	10 ₁₅₈	-14, -6, 5, 9
10 ₈₆	32	10 ₁₅₉	-20, -1, 8/3, 8
10 ₉₀	-7, 12, 18	10 ₁₆₀	26/3, 12, 18
10 ₉₁	-26, 2, 6, 10, 16	10 ₁₆₂	-2, 18, 20
10 ₉₂	-2, 38	10 ₁₆₃	-7, 5
10 ₉₃	2	10 ₁₆₄	-12, 16, 18, 24
10 ₉₄	6, 28	10 ₁₆₅	-22, 6, 14
10 ₉₅	-28, 16, 20	10 ₁₆₆	8
10 ₉₈	-4		
10 ₁₀₀	-12, -6		
10 ₁₀₂	-1, 12, 18		
10 ₁₀₃	-20, -12, -14, -6		
10 ₁₀₄	6, 10, 14, 16		
10 ₁₀₆	-14, -8, -6, -4/3, 6		
10 ₁₀₈	-2, 0, 11		

图 2: Boundary slopes of non-Montesinos knots

- [Ic-Mi] K. Ichihara, S. Mizushima *Crossing number and diameter of boundary slope set of Montesinos knot*, arXiv:math/0510370.
- [Ka] Y. Kabaya, *A method to find ideal points from ideal triangulations* arXiv:GT0706.0971.
- [Ne-Za] W.D. Neumann, D. Zagier, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, Topology 24 (1985), 307-332.
- [Yo] T. Yoshida, *On ideal points of deformation curves of hyperbolic 3-manifolds with one cusp*, Topology 30 (1991), no. 2, 155-170.
- [We] J. Weeks, *SnapPea*, computer program.