

# 曲面群の $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ 表現の Fenchel-Nielsen 座標

蒲谷祐一 (京都大学理学研究科)

## 1 序

$S$  を種数  $g \geq 2$  の向き付け可能な閉曲面とする. このとき  $S$  には双曲構造 (断面曲率  $\equiv -1$  の計量) が入る. 双曲曲面  $X$  と同相写像  $f: S \rightarrow X$  の組全体を適当な同値関係で割った空間  $\mathcal{T}(S)$  は Teichmüller 空間と呼ばれ様々な分野で研究されている. Fenchel-Nielsen 座標とは  $\mathcal{T}(S)$  上の  $6g - 6$  個の関数で微分同相  $\mathcal{T}(S) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{6g-6}$  を与える.

双曲曲面  $X$  の普遍被覆は双曲平面  $\mathbb{H}^2$  に等長である事から  $f_*(\pi_1(S))$  は  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  の離散部分群とみなせる. このことから  $\mathcal{T}(S)$  の点は離散忠実表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  の共役類とみなせる. よって  $\mathcal{T}(S)$  は表現の空間

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{conjugation}$$

の部分集合になる.

この空間の複素化として  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$  を考える事ができる.  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  は  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  と同型である事から, 離散忠実表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  は 3次元双曲多様体  $\rho(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^3$  を与える. このことから  $S$  とホモトピー同値な 3次元双曲多様体全体をパラメータ付けする事ができる. このうち quasi-Fuchsian と呼ばれる離散忠実表現に対しては [Tan], [Kou] によって Fenchel-Nielsen 座標の複素化が与えられている. またより一般の  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現に対しても Fenchel-Nielsen 座標の類似が構成されている [Kab].

本講演では  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$  に対する Fenchel-Nielsen 座標の構成について述べる (Xin Nie 氏との共同研究 [KN]). まず, 曲面群の高次元表現の空間に関する近年の研究について概観する.

$G$  を split 実半単純 Lie 群で中心が自明であるものとする (例えば  $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ ). Hitchin は表現の空間  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)/\mathrm{conj.}$  が  $\mathbb{R}^{|\chi(S)| \dim G}$  と同相な成分を持つ事を示した [Hit]. これは現在 Hitchin 成分と呼ばれている. 一方で Fock-Goncharov は同じ設定のもと positive representation という概念を定義した [FG06]. これらは離散忠実表現である事を示し, positive representation 全体の空間は Hitchin 成分と一致する事を示した. また Labourie は Anosov representation を定義し, これらの集合も Hitchin 成分と一致する事が示されている [Lab], [Gui].  $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  の場合にはこれらは Teichmüller 空間と一致するので, Hitchin 成分に関する研究は higher Teichmüller 理論と呼ばれ近年盛んになってきている. Fock-Goncharov はとくに  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$  や  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$  の場合には理想 3 角形分割を用いて非常に具体的に表現が記述できる事を示した. これらは Fock-Goncharov 座標と呼ばれ, 最近では 3次元多様体の基本群の高次元表現の場合にも一般化されている [BFG], [GTZ], [GGZ].

我々の Fenchel-Nielsen 座標では Fock-Goncharov によって導入された座標系を利用する. まず 3つ穴あき球面の基本群の表現を Fock-Goncharov によって導入された座標系を用いてパラメトライズし, 次にそれらを境界に沿って貼りあわせることで得られる. 古典的な場合と異なり, これらの座標系の間には関係式が現れてしまう事を注意しておく. 最後に Hitchin 成分に関しては Bonahon-Dreyer によって Fenchel-Nielsen 座標の類似が構成されている事を注意しておく [BD].

## 2 Fenchel-Nielsen 座標 (古典的な場合)

まず古典的な Fenchel-Nielsen 座標について簡単に振り返る. またこれらが cross ratio を用いて記述できる事を確認する. 以下  $S$  を種数  $g \geq 2$  の向き付け可能な閉曲面とする.

### 2.1 Fenchel-Nielsen 座標

$S$  と同相な双曲曲面  $X$  と同相写像  $f: S \rightarrow X$  の組を考える. ただし  $f_1: S \rightarrow X_1$  と  $f_2: S \rightarrow X_2$  はある等長写像  $h: X_1 \rightarrow X_2$  が存在して  $h \circ f_1$  と  $f_2$  がホモトピックであるとき同値である事とする. このような  $(X, f)$  の同値類全体は *Teichmüller 空間* と呼ばれる.

$S$  上に互いに交わらない単純閉曲線の組で  $S$  を 3 つ穴あき球面 (パンツ) に分割する物をとる (図 1 左). このような単純閉曲線の組をパンツ分解と呼ぶ. パンツ分解は  $3g - 3$  本の単純閉曲線からなる事がわかる. これらを  $C = c_1 \cup \dots \cup c_{3g-3}$  と書くことにする.  $S \setminus C$  は  $2g - 2$  個のパンツ  $P_1, \dots, P_{2g-2}$  からなる.

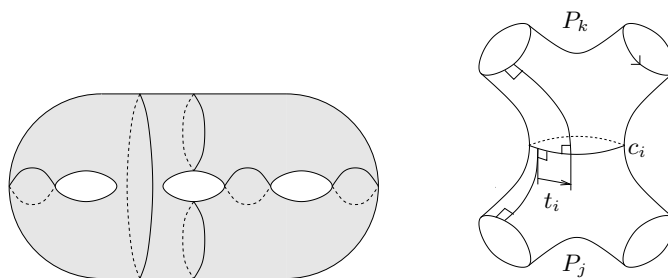


図 1: 左: パンツ分解, 右: ツイストパラメータ  $t_i$ .

$\mathcal{T}(S)$  の点  $(X, f)$  に対して,  $X$  の双曲計量を用いる事で単純閉曲線  $c_i$  を測地線にとる事ができる. この時  $P_i$  は測地的境界をもつ双曲曲面となる.  $c_i$  の  $X$  で測った長さを  $l_i$  とする. 初等的な双曲幾何から各パンツ  $P_i$  上の双曲構造はその境界の長さから完全に決まってしまう事が分かる. よって  $\{l_i\}$  から各パンツの双曲構造が復元できる. さらに  $S$  の計量を復元するためには  $\{P_i\}$  間のくつき方を指定すれば良い. 各  $c_i$  には 2 つのパンツ  $P_j$  と  $P_k$  が隣り合うが ( $j = k$  の場合もあり得る),  $P_j$  と  $P_k$  の他の境界から  $c_i$  への垂直な線をとる. (図 1 右. 取り方は何通りかあるが一つ固定.)  $c_i$  でのこれらの垂線の間の符号付きの距離を  $t_i$  と書き, ツイストパラメータと呼ぶ事にする. これらのパラメータの組  $(l_i, t_i)$  は *Fenchel-Nielsen 座標* と呼ばれ *Teichmüller 空間*  $\mathcal{T}(S)$  の大域的な座標系を与える.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(S) & \cong & (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})^{3g-3} \\ \Psi & & \Psi \\ (X, f) & \mapsto & (l_i, t_i) \end{array}$$

とくに  $S$  の *Teichmüller 空間* は  $\mathbb{R}^{6g-6}$  と微分同相になる事がわかる.

### 2.2 Cross ratio

次に Fenchel-Nielsen 座標を cross ratio の言葉で記述する. まず双曲平面について簡単に復習する.

双曲平面  $\mathbb{H}^2$  をまず上半平面モデル  $\{x + \sqrt{-1}y \mid y > 0\}$  で考えることにする.  $\mathbb{H}^2$  に  $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  で計量を定めると, これは完備で断面曲率  $\equiv -1$  となる. ここで  $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  は自然に  $\mathbb{H}^2$  の境界とみなせる.  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  は  $\mathbb{R}P^1$  に一次分数変換  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$  で作用するが, この作用は  $\mathbb{H}^2$  の向きを保つ等長変換に自然に拡張する.  $\mathbb{H}^2$  の測地線は  $\{y = 0\}$  に垂直な直線か, 垂直に交わる半円である.

一次分数変換  $t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$  は上半平面モデルを円板  $\{z \mid |z| < 1\}$  に移す. このモデルでは測地線は単位円  $\{z \mid |z| = 1\}$  と垂直に交わる円が直線となる. 以降, 上半平面モデルで話をしたが, 図に関しては見やすさの観点から円板モデルで描く事がある.

$\mathbb{R}P^1$  の互いに異なる 4 点  $z_0, z_1, z_2, z_3$  に対して, *cross ratio* を

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = \frac{(z_3 - z_0)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_0)}$$

で定義する. 特に重要な性質は  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  の作用に関する不変性である. すなわち  $g \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$  に対して,  $[gz_0 : gz_1 : gz_2 : gz_3] = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$  が成り立つ.  $g \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$  として一次分数変換  $t \mapsto \frac{(t - z_0)(z_2 - z_1)}{(t - z_1)(z_2 - z_0)}$  に対応するものをとると,  $(z_0, z_1, z_2)$  は  $(0, \infty, 1)$  に正規化される. このときの  $g \cdot z_3$  の値が  $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$  に等しくなる.

つぎにパンツ  $P$  上の双曲計量は 3 つの cross ratio で記述される事を見る. まず  $P$  を 2 つの理想三角形 (ideal triangle, 頂点が無限遠点にある三角形) に分割する (図 2 左).  $P$  の普遍被覆  $\tilde{P}$  は  $\mathbb{H}^2$  の中で図 2 の右の様になる.  $P$  の境界をそれぞれ  $c_1, c_2, c_3$  とする. ここで  $c_1$  と  $c_2$  に巻き付く理想三角形分割の辺を  $\lambda_{12}$  とする.  $\lambda_{12}$  の普遍被覆への持ち上げを一つ固定しその端点を  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}P^1$  と書く事にする (図 2 右). この持ち上げた辺には 2 つの理想三角形が隣接するが, それらの頂点で  $z_0$  でも  $z_1$  でもないものを  $z_2, z_3$  と置く. (本来なら  $z_2$  と  $z_3$  の取り方を  $P$  の向きを考えて指定しないとイケないが, ここでは省略する.) ここで辺  $\lambda_{12}$  に対してパラメータ  $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$  を対応させる. Cross ratio の  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  の作用に関する不変性からこの量は  $\lambda_{12}$  の持ち上げの取り方に依らない事が分かる. 同様にして理想三角形分割の残りの 2 辺に対しても cross ratio でパラメータを与える. 逆にこれらの 3 つの値は  $\tilde{P}$  内の隣り合う理想三角形の位置関係を決めてしまうので,  $\tilde{P} \subset \mathbb{H}^2$  の形を一意に定める. よって  $P$  上の双曲計量もこれらの 3 つの値から一意に定まる. さらに  $c_i$  の長さを  $l_i$  とすれば  $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = \exp\left(\frac{-l_1 - l_2 + l_3}{2}\right)$  を満たす事が簡単な計算から分かる (例えば [Kab] の Prop. 11).

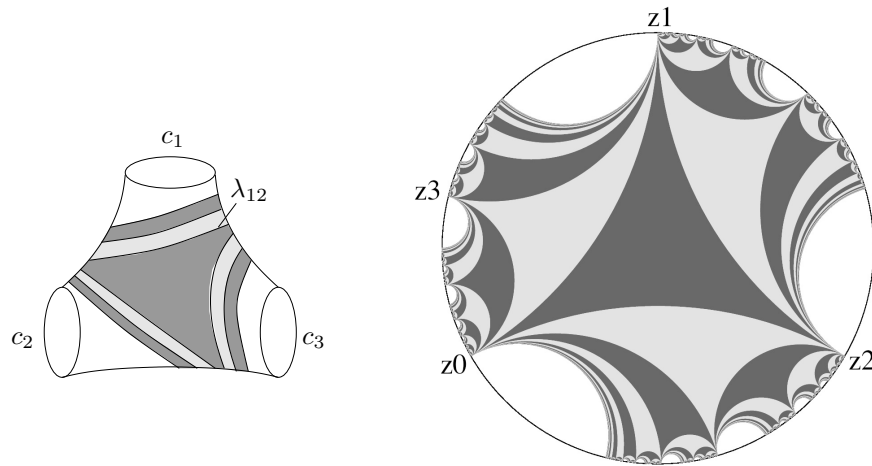


図 2: 左: パンツ  $P$  の理想三角形分割, 右: その普遍被覆  $\tilde{P}$ .

ツイストパラメータも同様に cross ratio で記述する事ができる. 2 つの双曲構造の定まったパンツ  $P_1$  と  $P_2$  が単純閉曲線  $c_1$  で隣り合っているとすると (図 3 左).  $P_1$  と  $P_2$  にはそれぞれ理想三角形分割が与えられているとする. このとき  $P_1 \cup_{c_1} P_2$  の普遍被覆を考える (図 3 右).  $c_1$  の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げを一つ固定し, その端点を  $z_0, z_1$  と書く事にする. ただし  $P_1$  と  $P_2$  の理想三角形は無限遠点  $z_1$  に向かって巻き付くと仮定する (図 3 右). このとき  $P_1$  の理想三角形の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げで,  $z_1$  を頂点に持つ物がとれるが, それの  $z_1$  以外の頂点を  $z_2$  とする (図 3 右). 同様に  $P_2$  から  $z_3$  を定める. ( $z_2, z_3$  の取り方には任意性があるが, これは Fenchel-Nielsen のツイストパラメータを定義する際に取った垂線の任意性に対応する.) このとき  $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$  は  $\tilde{P}_1$  と  $\tilde{P}_2$

の位置関係を完全に決定する。よって  $P_1 \cup_{c_1} P_2$  の普遍被覆の  $\mathbb{H}^2$  内での形が一意に定まり、 $P_1 \cup_{c_1} P_2$  の双曲構造が一意に定まる。若干複雑ではあるが、この cross ratio も Fenchel-Nielsen 座標で具体的に書く事ができる ([Kab] の Prop. 12, 13)。

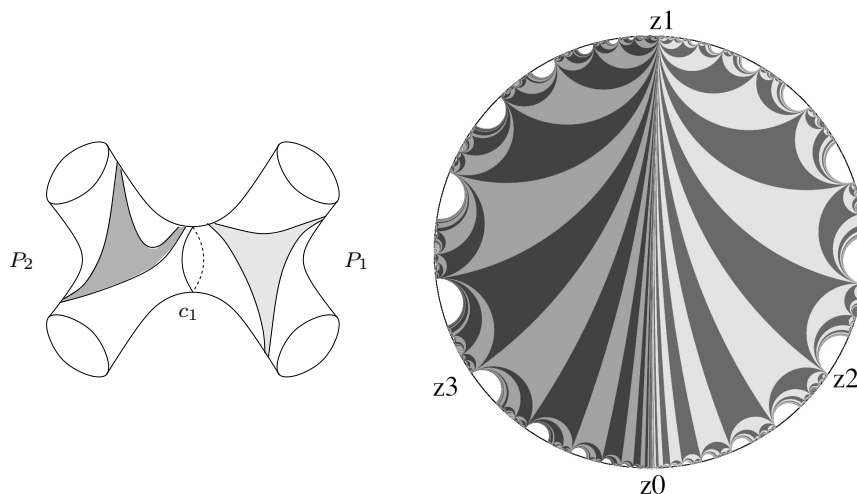


図 3: 左：隣り合ったパンツとその理想三角形分割，右：その普遍被覆。

ここまでに見てきたように  $S$  上の双曲構造は、 $S$  のパンツ分解を取り、さらに各パンツを 2 つの理想三角形に分割する事で cross ratio を用いてパラメトライズできる。三角形同士の隣り合い方は、4 点の位置関係と思えるので、これを記述する際に cross ratio が現れる。Cross ratio は  $\mathbb{R}P^1$  を  $\mathbb{C}P^1$  に変えても同様に定義できる。この場合にも  $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の作用に関する不変性が成り立ち、同様の構成で、 $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}(2, \mathbb{C}))/\text{conj.}$  もある程度ジェネリックな物に限ればパラメトライズする事ができる [Kab]。

これを高次元の表現、 $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$  表現、に一般化するには  $\mathbb{R}P^1$  や  $\mathbb{C}P^1$  の代わりに旗多様体を用いる事で実現できる。

### 3 旗多様体, triple ratio, edge function

#### 3.1 旗多様体

$\mathbb{C}^n$  の部分空間の列,

$$\{0\} = V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \dots \subsetneq V^n = \mathbb{C}^n.$$

を  $\mathbb{C}^n$  の旗 (flag) という。旗多様体  $\mathcal{F}_n$  を  $\mathbb{C}^n$  の旗全体の集合として定義する。 $\mathcal{F}_n$  には  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  や  $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$  が左から作用し、次のように等質空間として表す事ができる。

$\text{GL}(n, \mathbb{C})$  の元を列ベクトル  $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{C}^n$  を用いて  $X = (x^1 \dots x^n)$  の様を書く事とする。 $X$  から  $V^i = \text{span}_{\mathbb{C}}\{x^1, \dots, x^i\}$  と部分空間の列を定義する事で  $\text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}_n$  が定まる。 $B \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$  を上三角行列からなる部分群とする。 $B$  の元は  $X = (x^1 \dots x^n) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  に左から

$$X \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x^1 & b_{12}x^1 + b_{22}x^2 & \dots & b_{1n}x^1 + \dots + b_{nn}x^n \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

の様作用する事から  $\text{GL}(n, \mathbb{C})/B \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_n$  を誘導する。これは実際に全単射である事が簡単に確かめられる。

以降、旗を  $\text{GL}(n, \mathbb{C})/B$  の代表元として  $n \times n$  行列で表す記法を多用する。

### 3.2 Triple ratio

定義 3.1  $k$  個の旗  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{F}_n$  が *generic* であるとは、任意の整数の組  $0 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$  で  $i_1 + \dots + i_k = n$  を満たすものに対し、

$$\det(x_1^1 \cdots x_1^{i_1} x_2^1 \cdots x_2^{i_2} \cdots x_k^1 \cdots x_k^{i_k}) \neq 0 \quad (3.2)$$

となることを言う。但し  $X_i = (x_i^1 \dots x_i^n)$  とする。

$X_1, \dots, X_k$  が *generic* であるとき (3.2) の左辺を  $\det(X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_k^{i_k})$  と書く事にする。もちろんこれは代表元  $X_i$  の取り方に依存する量である。Generic な 3 組に対しては次のようにして代表元の取り方に依らない量が定義される。

定義 3.2 ([FG06])  $X, Y, Z \in \mathcal{F}_n$  は *generic* であるとする。自然数  $1 \leq i, j, k \leq n-1$  で  $i+j+k=n$  を満たすものに対し、

$$T_{i,j,k}(X, Y, Z) = \frac{\det(X^{i+1} Y^j Z^{k-1}) \det(X^{i-1} Y^{j+1} Z^k) \det(X^i Y^{j-1} Z^{k+1})}{\det(X^{i+1} Y^{j-1} Z^k) \det(X^i Y^{j+1} Z^{k-1}) \det(X^{i-1} Y^j Z^{k+1})}.$$

と定義する。これを *triple ratio* と呼ぶ。

(3.1) から  $T_{i,j,k}(X, Y, Z)$  は代表元  $X, Y, Z$  の取り方に依らない量である事がわかる。定義 3.2 に現れる  $(i, j, k)$  の組は  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  個あり、三角形の内部の格子点に対応する事に注意する (図 4 左)。  $T_{i,j,k}(X, Y, Z)$  は格子点  $(i, j, k)$  の周りで  $\det(X^* Y^* Z^*)$  の積を交互に取った物とみなせる (図 4)。

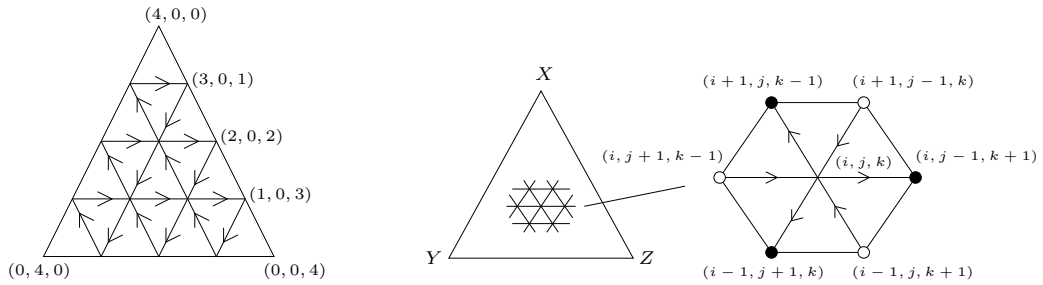


図 4: Triple ratio の図式的な解釈。

定義から次の性質を満たす事がわかる：

$$T_{i,j,k}(X, Y, Z) = T_{j,k,i}(Y, Z, X) = T_{k,i,j}(Z, X, Y), \quad (3.3)$$

$$T_{i,j,k}(X, Y, Z) = \frac{1}{T_{i,k,j}(X, Z, Y)}, \quad (3.4)$$

$$T_{i,j,k}(X, Y, Z) = T_{i,j,k}(AX, AY, AZ) \quad (A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})). \quad (3.5)$$

とくに (3.5) から  $T_{i,j,k}(X, Y, Z)$  は  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  の左作用に関して不変な量である事がわかる。次のように旗多様体の順序付きの配置空間

$$\text{Conf}_k(\mathcal{F}_n) = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \setminus \{(X_1, \dots, X_k) \mid \mathcal{F}_n \text{ の generic な } k \text{ 組}\},$$

を定義すると、 $T_{i,j,k}$  は  $\text{Conf}_3(\mathcal{F}_n)$  上の複素数に値をとる関数を与える。よって三角形の内部の格子点に対応した  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  個の不変量が得られることになる。

命題 3.3 ([FG06])  $T_{i,j,k}$  は 1 対 1 対応

$$\text{Conf}_3(\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^*)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

を与える。

例 3.4  $n = 2$  の場合を考える. このとき  $\mathcal{F}_2 = \mathbb{C}P^1$  である.  $(X, Y, Z)$  が *generic* である事は, これらが互いに異なる  $\mathbb{C}P^1$  の点になる事と同値である.  $n = 2$  の場合には *triple ratio* を定める  $(i, j, k)$  の組は存在しない. 一方で  $\text{Conf}_3(\mathbb{C}P^1)$  が 1 点である事は簡単に分かる.

$n = 3$  の場合 *generic* な  $X, Y, Z$  は  $\text{GL}(3, \mathbb{C})$  の左作用で次の形に出来る:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & T+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで  $T = T_{1,1,1}(X, Y, Z)$ .

命題 3.3 より  $n \geq 3$  のとき,  $\mathcal{F}_n$  の *generic* な 3 つ組  $(X, Y, Z)$  と  $(X', Y', Z')$  はある  $T_{i,j,k}$  の値が異なるとき  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  の左作用で移りあわない事を意味する. しかしながら 3 つ目の旗の条件を緩めると次のような事実が示せる.

補題 3.5  $X, Y \in \mathcal{F}_n$  と  $z \in \mathbb{C}P^{n-1}$  は *generic* であるとする ( $\det(X^i Y^{n-i-1} z) \neq 0$  かつ  $\det(X^i Y^{n-i}) \neq 0$ ). また  $X', Y' \in \mathcal{F}_n$  と  $z' \in \mathbb{C}P^{n-1}$  も *generic* であるとする. このとき次を満たす  $A \in \text{PGL}(n, \mathbb{C})$  の元が一意に存在する:

$$AX = X', \quad AY = Y', \quad Az = z'.$$

補題 3.6  $X, Y \in \mathcal{F}_n$  と  $z \in \mathbb{C}P^{n-1}$  は *generic* であるとする. 任意の  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  個の  $c_{i,j,k} \in \mathbb{C}^*$  に対して,  $Z^1 = z$  かつ  $T_{i,j,k}(X, Y, Z) = c_{i,j,k}$  となる  $Z \in \mathcal{F}_n$  が一意に存在する.

### 3.3 Edge function

次に 4 つ組の旗  $(X, Y, Z, T)$  を考える.

定義 3.7 ([FG06])  $1 \leq i \leq n-1$  に対して

$$\delta_i(X, Y, Z, T) = \frac{\det(X^{i-1} Y^1 Z^{n-i}) \det(X^i Z^{n-i-1} T^1)}{\det(X^i Y^1 Z^{n-i-1}) \det(X^{i-1} Z^{n-i} T^1)} \quad (3.6)$$

を *edge function* と呼ぶ.

これは  $(X, Y, Z)$  と  $(X, Z, T)$  が *generic* である時に定義できる. Triple ratio と同様に代表元の取り方に依らない量である事が確認できる.  $Y, T$  に関しては一次元部分空間しか見ていないから  $\delta_i(X, Y, Z, T)$  は実際には  $X, Z \in \mathcal{F}_n$  と  $Y^1, T^1 \in \mathbb{C}P^{n-1}$  に対して定まる量である. Triple ratio の場合と同様に  $\delta_i(X, Y, Z, T)$  は図 5 のように図式的に解釈ができる.

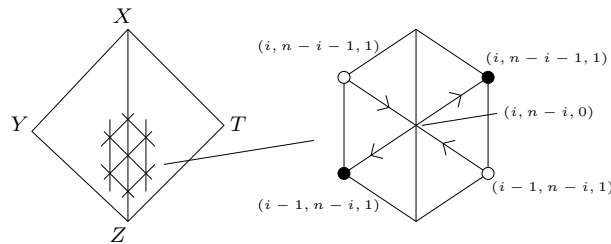


図 5: Edge function の図式的な解釈.

定義から直ちに次の性質が確かめられる.

$$\delta_i(X, Y, Z, T) = \frac{1}{\delta_i(X, T, Z, Y)}, \quad (3.7)$$

$$\delta_i(X, Y, Z, T) = \delta_{n-i}(Z, T, X, Y), \quad (3.8)$$

$$\delta_i(X, Y, Z, T) = \delta_i(AX, AY, AZ, AT) \quad (A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})). \quad (3.9)$$

例 3.8  $n = 2$  の場合を考える. このとき  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$  の作用で, はじめから  $X = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ ,  $Z = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$  と仮定できる.  $T = \begin{pmatrix} t_1 & * \\ t_2 & * \end{pmatrix}$  とおくと

$$\delta_1(X, Y, Z, T) = -t_2/t_1 = -[\infty : 0 : 1 : t_1/t_2] = -[X : Z : Y : T]$$

となり  $\delta_1(X, Y, Z, T)$  は本質的に *cross ratio* と同じである事がわかる.

次の補題は  $\delta_i$  に対する補題 3.6 の類似物である.

補題 3.9  $X, Z \in \mathcal{F}_n$  と  $y \in \mathbb{C}P^{n-1}$  は *generic* であるとする. 任意の  $d_1, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{C}^*$  に対して

$$\delta_i(X, y, Z, t) = d_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

となる  $t \in \mathbb{C}P^{n-1}$  が一意に存在する.

### 3.4 $\text{Conf}_k(\mathcal{F}_n)$ のパラメータ付け

命題 3.3 により  $\text{Conf}_3(\mathcal{F}_n)$  は triple ratio  $\{T_{i,j,k}\}$  で完全に記述できる事がわかる.  $\text{Conf}_k(\mathcal{F}_n)$  ( $k \geq 4$ ) の場合でも  $T_{i,j,k}$  と  $\delta_i$  を適当に組み合わせる事で,  $\text{Conf}_k(\mathcal{F}_n)$  の元をパラメトライズする事ができる.

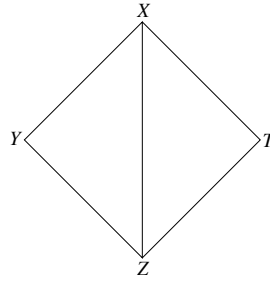


図 6: 4つ組  $(X, Y, Z, T)$  を2つの‘三角形’ $(X, Y, Z)$  と  $(Y, Z, T)$  に分割.

まず  $k = 4$  の場合を考える. 4つ組  $(X, Y, Z, T)$  に対してこれらを2つの3つ組  $(X, Y, Z)$  と  $(X, Z, T)$  に‘三角形分割’する(図6). ここで各三角形に対応して triple ratio  $\{T_{i,j,k}(X, Y, Z)\}$  と  $\{T_{i,j,k}(X, Z, T)\}$  を考える. また‘辺  $XZ$ ’に対して  $\{\delta_i(X, Y, Z, T)\}$  をとる. (3.5) と (3.9) によりこれらは  $\text{Conf}_4(\mathcal{F}_n)$  上の関数を与えるが, 逆にこれらの値から  $(X, Y, Z, T) \in \text{Conf}_4(\mathcal{F}_n)$  が復元する事が次のようにして分かる.

まず  $X, Y \in \mathcal{F}_n$  と  $Z^1 \in \mathbb{C}P^{n-1}$  を *generic* になるように任意に選ぶ. つぎに補題 3.6 より  $\{T_{i,j,k}(X, Y, Z)\}$  の値から  $Z^1 \in \mathbb{C}P^{n-1}$  が  $Z \in \mathcal{F}_n$  の元に一意に拡張する事がわかる. 続いて補題 3.9 により  $\{\delta_i(X, Y, Z, T)\}$  の値から  $T^1 \in \mathbb{C}P^{n-1}$  が一意に定まる. 再び補題 3.6 を今度は  $(X, Z, T^1)$  に用いる事で  $\{T_{i,j,k}(X, Z, T)\}$  の値から  $T^1 \in \mathbb{C}P^{n-1}$  を  $T \in \mathcal{F}_n$  の元に一意に拡張する事ができる.

同様にして  $k \geq 5$  の場合にも  $k-2$  個の三角形に分割する事で,  $(k-2)\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  個の  $T_{i,j,k}$  と  $(k-3)(n-1)$  個の  $\delta_i$  で  $\text{Conf}_k(\mathcal{F}_n)$  をパラメトライズする事ができる.

### 3.5 穴あき曲面の $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ 表現

$S$  を種数  $g$  で  $p > 0$  個の穴を持つオイラー数が負の曲面とする. このとき  $S$  は  $p$  個の穴に頂点を持つように理想三角形分割ができる. この三角形分割は  $4g - 4 + 2p$  個の三角形と  $6g - 6 + 3p$  個の辺を持つ事がわかる. ここで各三角形に triple ratio のパラメータ  $T_{i,j,k}$  を, 各辺に edge function のパラメータ  $\delta_i$  を置く事で合計

$$(4g - 4 + 2p)\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (6g - 6 + 3p)(n-1) = (2g - 2 + p)(n^2 - 1) = |\chi(S)| \cdot \dim_{\mathbb{C}}(\text{PGL}(n, \mathbb{C}))$$

個のパラメータを得る.  $S$  の理想三角形分割を普遍被覆  $\tilde{S}$  の理想三角形分割に持ち上げ, §3.4 の議論を用いる事でこれらの理想三角形を  $\mathcal{F}_n$  に展開する事ができる. 補題 3.5 を用いる事で展開図から表現  $\pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  を得る事ができる. このようにして  $(\mathbb{C}^*)^{(2g-2+p)(n^2-1)}$  から  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$  への写像を得る.

とくに  $P$  を 3 つ穴あき球面とすれば,  $\mathrm{Hom}(\pi_1(P), \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$  は  $2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  個の triple ratio パラメータと  $3 \cdot (n-3)$  の edge function パラメータの計  $(n^2-1)$  個のパラメータで記述できる事がわかる.

## 4 ツイストパラメータ

最後にツイストパラメータを定義する. 2 つのパンツ  $P, P'$  が図 7 の様に隣り合っている状況を考える.  $S = P \cup P'$  とし  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma_d, \gamma_e \in \pi_1(S)$  を図 7 の様に固定する.

ここで表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  に対してツイストパラメータを次のように定義する.  $\rho(\gamma_a)$  の固有値を  $e_{a,1}, \dots, e_{a,n}$  とし, これらの固有ベクトルを  $v_a^1, \dots, v_a^n$  とする. これらは一次独立であると仮定する. ここで  $X_a, Y_a \in \mathcal{F}_n$  を次のように定義する.

$$X_a^i = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_a^1, \dots, v_a^i\}, \quad Y_a^i = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_a^{n-i+1}, \dots, v_a^n\}$$

定義から  $\rho(\gamma_a)X_a = X_a, \rho(\gamma_a)Y_a = Y_a$  が成り立ち,  $(X_a, Y_a)$  は generic になる. このことから  $(X_a, Y_a)$  の組は  $\rho(\gamma_a)$  の  $\mathcal{F}_n$  への作用の固定点とみなせる. 同様に  $e_{b,i}, e_{c,i}$  なども定義する. このとき  $\gamma_a$  に関するツイストパラメータを

$$t_i^a = \delta_i(X_a, X_b, Y_a, X_c) \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (4.1)$$

で定義する (図 7). ここで図 3 を思い出すと, 作用している空間が  $\mathbb{R}^2$  の境界である  $\mathbb{R}P^1$  から, 旗多様体  $\mathcal{F}_n$  に変わっただけで同じ状況である事を注意しておく.

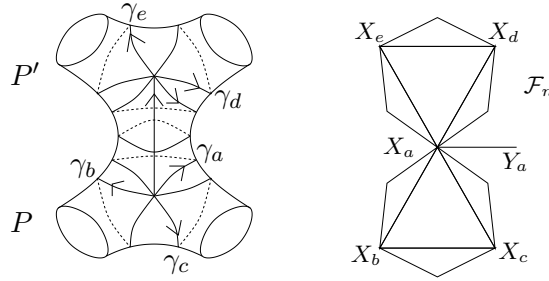


図 7:

## 5 閉曲面の $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ 表現の Fenchel-Nielsen 座標

これまで定義されたパラメータをまとめると次のようになる.

$S$  を種数  $g$  の閉曲面とし,  $C = c_1 \cup \dots \cup c_{3g-3}$  をパンツ分解とする. この時  $S \setminus C$  は  $2g-2$  個のパンツからなるが, §3.5 で各パンツの基本群の表現は

- $2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  個の triple ratio パラメータ,
- $3 \cdot (n-3)$  の edge function パラメータ,

の合計  $(n^2-1)$  個のパラメータで記述される事をみた. さらに各  $c_i$  で  $n-1$  個のパラメータ (4.1) がある事から, これらを合計すると,

$$(2g-2)(n^2-1) + (3g-3)(n-1)$$



個のパラメータで  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PGL}(n, \mathbb{C}))/\text{conj.}$  がパラメータ付けされた事になる.

§4 では表現  $\rho$  からツイストパラメータを定めたが, §3.5 の方法で triple ratio  $T_{i,j,k}$  と edge function  $\delta_i$  から作った各パンツの基本群の表現は必ずしもそれらが境界で貼り合う訳ではない. 境界で貼り合うためには, 境界でのモノドロミーが一致する必要がでてくる. このことから各  $c_i$  で  $(n-1)$  個の条件式が出てくる. よって上記のパラメータの空間の中で, これらの条件式をみたく部分多様体が  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PGL}(n, \mathbb{C}))/\text{conj.}$  をパラメータ付けする空間となる. [KN] ではこの条件式を  $T_{i,j,k}$  と  $\delta_i$  の具体的な有理式として与えている. この条件式は各  $c_i$  から  $(n-1)$  個ずつ出てくるので

$$(2g-2)(n^2-1) + (3g-3)(n-1) - (3g-3)(n-1) = (2g-2)(n^2-1)$$

次元の代数多様体で  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PGL}(n, \mathbb{C}))/\text{conj.}$  がパラメータ付け出来る事となる.

## 参考文献

- [BFG] N. Bergeron, E. Falbel and A. Guilloux, *Tetrahedra of flags, volume and homology of  $SL(3)$* , preprint 2011, arXiv:1101.2742.
- [BD] F. Bonahon and G. Dreyer, *Parametrizing Hitchin components*, preprint 2012, arXiv:1209.3526.
- [FG06] V. Fock and A. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 103 (2006), 1–211.
- [GGZ] S. Garoufalidis, M. Goerner and C. Zickert, *Gluing equations for  $PGL(n, \mathbb{C})$ -representations of 3-manifolds*, preprint 2012, arXiv:1207.6711
- [GTZ] S. Garoufalidis, D. Thurston and C. Zickert, *The complex volume of  $SL(n, \mathbb{C})$ -representations of 3-manifolds*, preprint 2011, arXiv:1111.2828.
- [Gol] W. Goldman, *Convex real projective structures on compact surfaces*, J. Differential Geom., 31, 3 (1990), 791–845.
- [Gui] O. Guichard, *Composantes de Hitchin et représentations hyperconvexes de groupes de surface*, J. Differential Geom. 80, 3 (2008), 391–431.
- [Hit] N. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology, 31, 3 (1992), 449–473.
- [Kab] Y. Kabaya, *Parametrization of  $PSL(2, \mathbb{C})$ -representations of surface groups*, Geometriae Dedicata, Volume 170, Issue 1 (2014), 9–62. arXiv:1110.6674
- [KN] Y. Kabaya and X. Nie, *Parametrization of  $PSL(n, \mathbb{C})$ -representations of surface groups*, in preparation.
- [Kou] C. Kourouniotis, *Complex length coordinates for quasi-Fuchsian groups*, Mathematika 41 (1994), no. 1, 173–188.
- [Lab] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, Invent. Math., 165, 1 (2006), 51–114.
- [Tan] Ser Peow Tan, *Complex Fenchel-Nielsen coordinates for quasi-Fuchsian structures*, Internat. J. Math. 5 (1994), no. 2, 239–251.