Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups

蒲谷　祐一　(京都大学大学院理学研究科)*

1. クライン群論から

S を穴あきトーラスとする（ほとんどの事実は一般の双曲曲面でも成り立つ）.

$$X(S) = \{\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \mid \text{準同型で穴を放物的元に移す}\}/(\text{共役を同一視}),$$
$$AH(S) = \{[\rho] \in X(S) \mid \rho \text{ は単射で，} \rho(\pi_1(S)) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \text{ は離散部分群}\},$$
$$QF(S) = \{[\rho] \in AH(S) \mid \rho(\pi_1(S)) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \text{ は quasi-Fuchsian}\}.$$

$\mathbb{H}^3$ を双曲３次元空間とする．$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は $\mathbb{H}^3$ に向きを保つ等長変換として作用する事から，$\rho \in AH(S)$ なら $M = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ は（完備）双曲３次元多様体で $\pi_1(M) \cong \pi_1(S)$ を満たす．よって $AH(S)$ はそのような双曲３次元多様体の（標識付き）変形空間と思える．次の事実が知られている：

- $QF(S)$ は $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\overline{S}) \cong \mathbb{R}^4$ と同相（ここで $\mathcal{T}(S)$ は S のタイヒミュラー空間）.
- $X(S)$ の中で $QF(S)$ は開集合で $\overline{QF(S)} = AH(S)$ (Minsky).

よって $AH(S)$ は４次元開球の閉包でしかないといえる．さらに Minsky による穴あきトーラス群の場合の Ending Lamination Theorem から $AH(S)$ は集合としては完全に理解されていると言える．しかしながら $X(S)$ の中での $QF(S)$ や $AH(S)$ の形は非常に複雑である事も知られている（self-bumping (McMullen)，局所非連結性 (Bromberg) など）.

2. 線型スライス

穴あきトーラス S 上の（本質的）単純閉曲線を $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と同一視する．p/q に自由ホモトピックな元 $\gamma_{p/q} \in \pi_1(S)$ を用いて複素距離 $\lambda_{p/q} : X(S) \to \mathbb{C}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ を

$$\lambda_{p/q}(\rho) = 2\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{\mathrm{tr}(\rho(\gamma_{p/q}))}{2}\right) = (\ \rho(\gamma_{p/q}) \text{ の移動距離 }) + \sqrt{-1}\,(\ \rho(\gamma_{p/q}) \text{ の回転角 })$$

で定める.

定義 1 実数 $l > 0$ に対し，線型スライス $QF(l) \subset QF(S)$ を次で定義する：

$$QF(l) = \{\, [\rho] \in QF(S) \mid \lambda_{1/0}(\rho) = l \,\}$$

すなわち $QF(l)$ は ４次元開球 $QF(S)$ を等式 $\lambda_{1/0} \equiv l$ でスライスした物と言える．以下の事実が知られている：

- $QF(l)$ は複素１次元で，各連結成分は開円板と同相（McMullen の disk-convexity）.

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科
e-mail: `kabaya@math.kyoto-u.ac.jp`
web: `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kabaya/`

- $QF(l)$ には Fuchs 表現を含む成分が唯一つある．これを標準的成分と呼ぶ．
- $l>0$ が十分小さければ $QF(l)$ は標準的成分のみ（小森-山下 [1], Otal）．

一方で l が大きい場合には次の事実が示されている：

定理 2 (小森-山下 [**1**]) $l>0$ が十分大きければ $QF(l)$ は標準的でない成分をもつ．

$QF(l)$ には単純閉曲線 1/0 に関するデーンツイストが作用し，標準的成分はこの作用で保たれる．他の成分はこの作用で別の成分に移る事が分かるので，一つでも標準的でない成分があれば無限個存在する事が示せる．今回の講演では定理 2 を複素射影構造の言葉で定式化し別証明を与える．

3. 複素射影構造

$P(S)$ を S 上の標識付き複素射影構造（$(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \mathbb{C}P^1)$-構造）全体の空間とする．ただし，穴の周りでは穴あき円板と正則同値であると仮定する．複素射影構造からホロノミー $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が定まるが，これは局所同相写像 $\mathrm{hol}: P(S) \to X(S)$ を与える．$QF(S)$ にホロノミーを持つ複素射影構造は次のように連結成分 Q_μ に分解する事が知られている：

定理 3 (**Goldman**)

$$\mathrm{hol}^{-1}(QF(S)) = \bigsqcup_{\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)} Q_\mu$$

S が穴あきトーラスの場合には $\mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$ は非負整数の重み付きの単純閉曲線と思える．よって重み $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と 単純閉曲線 p/q を用いて $k \cdot p/q \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$ と表される．

$X \in \mathcal{T}(S)$ で曲線 1/0 の長さが l となる物をとる．1/0 に関する complex earthquake

$$\mathrm{Eq}(l) = \{\mathrm{Gr}_{b\cdot 1/0}(\mathrm{tw}_{t\cdot 1/0}(X)) \mid t \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset P(S)$$

を考える（記号 $\mathrm{Eq}(l)$ は一般的な物ではない）．ここで $\mathrm{tw}_{t\cdot 1/0}: \mathcal{T}(S) \to \mathcal{T}(S)$ は 1/0 に関する距離 t の Fenchel-Nielsen ツイスト，$\mathrm{Gr}_{b\cdot 1/0}: \mathcal{T}(S) \to P(S)$ は 1/0 にホモトピックな測地線に沿って高さ b のアニュラスを grafting する事で得られる写像である．構成から $\mathrm{Eq}(l) \cap Q_\mu$ の連結成分は hol で $QF(l)$ の連結成分に移る．とくに標準的成分の逆像は $\mathrm{Eq}(l) \cap Q_{k\cdot 1/0}$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ となる事がわかる．よって次が成り立つ：

命題 4 $\mathrm{Eq}(l) \cap Q_{k\cdot p/q} \neq \emptyset$ $(k>0,\, p/q \neq 1/0)$ なら，$QF(l)$ は標準的でない成分を持つ．

実際に次が示せる：

命題 5 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $p/q \neq 1/0$ を固定する．l が十分大きいとき，$\mathrm{Eq}(l) \cap Q_{k\cdot p/q} \neq \emptyset$．

系 6 $QF(l)$ を 1/0 に関するデーンツイストの作用で割った後でも，任意の数以上の連結成分を持つように $l>0$ をとれる．

最後に $\mathrm{Eq}(l) \cap Q_{k\cdot p/q}$ $(p/q \neq 1/0)$ の成分が無限個ある可能性もあるので，デーンツイストの作用で割った後でも $QF(l)$ は無限個の成分を持ち得る事を注意しておく．

参考文献

[1] Y. Komori and Y.Yamashita, *Linear slices of the quasi-Fuchsian space of punctured tori*, Conformal geometry and dynamics 16 (2012), 89–102.