

蒲谷 祐一 (かばや ゆういち)

1. 極限の定義

1.1. 自然数, 整数, 有理数. 自然数, 整数, 有理数については高校までに習った素朴な方法で理解しているものとする. 自然数とは $1, 2, 3, \dots$ のような数である. 自然数全体の集合を \mathbb{N} で表す. 2つの自然数 m, n に対して, 和 $m+n$ と積 mn が定まる. 整数とは自然数に 0 と負の数を含めたものである. 整数全体の集合を \mathbb{Z} で表す. 2つの整数 m, n に対して $m+n$ や mn が定まるのは同じだが, 整数の場合はさらに差 $m-n$ も定まる. (普通は $-n$ を定めてから, $m-n := m+(-n)$ と定義する.) 2つの整数の分数 p/q としてかける数を有理数という. ただし q は 0 でない整数とする. 有理数全体の集合を \mathbb{Q} で表す. 2つの有理数 $p_1/q_1, p_2/q_2$ に対し, 和と差と積を

$$\begin{aligned} p_1/q_1 \pm p_2/q_2 &= (p_1q_2 \pm p_2q_1)/(q_1q_2), \\ p_1/q_1 \cdot p_2/q_2 &= (p_1p_2)/(q_1q_2), \end{aligned}$$

で定義する. 有理数の場合, p_2/q_2 が 0 でない時 (p_2 が 0 でない時) には商

$$\frac{p_1/q_1}{p_2/q_2} = (p_1q_2)/(p_2q_1)$$

も定まる. これらの集合の間には $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ の包含関係が成り立つ.

2つの有理数の間には大小関係が定まる. つまり2つの有理数 a, b に対して,

$$a < b \text{ または } b < a \text{ または } a = b$$

のいずれか一つが成り立つ. $<$ は次の性質を満たす.

- (1) $a < b$ かつ $b < c$ ならば $a < c$ (推移律)
- (2) 任意の有理数 c について, $a < b$ ならば $a+c < b+c$
- (3) 任意の正の有理数 $c > 0$ について, $a < b$ ならば $ac < bc$

有理数 a に対して, a と $-a$ のうち大きい方を $|a|$ で表す. 即ち $|a| = \max\{a, -a\}$. $||$ は絶対値と呼ばれ, 次が成り立つ.

- (4) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- (5) $|a+b| \leq |a| + |b|$
- (6) 任意の正の有理数 $c > 0$ について, $|ca| = c|a|$

1.2. 実数の直感的な定義. 最終的には実数を有理数から構成する方法を理解する事を目標とするが, 初めは直感的に数直線上の点として実数を理解しよう. 実数全体の集合を \mathbb{R} で表す. \mathbb{R} を数直線と同一視しているとも言える. 有理数 r を 0 からの距離が $|r|$ である数直線上の点と, $r > 0$ なら正の方向に, $r < 0$ なら負の方向に, 対応させることで有理数を実数とみなせる. これにより \mathbb{Q} は \mathbb{R} の部分集合とみなせる. 即ち $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

実数に対しても, 和, 差, 積, (0 以外での) 商が定まり, 大小関係や絶対値 $||$ も定まる. §1.1 の (1)-(6) は有理数を実数に置き換えても成り立つ. 例えば $x^2 = 2$ となる正の実数は $\sqrt{2}$ と表されるが, この実数は有理数でない事を高校で学んでいると思う. よって $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ であることがわかる. 例えば円周率 π はどんな有理数係数の多項式の零点にもならない事が知られている. (このような数は超越数と呼ばれる.)

1.3. 数列の極限. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, あるいは略して $\{a_n\}$, を実数の列とする. つまりすべての自然数 n に対してある実数 a_n が定まっているとする.

定義 1.1. 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる時, $\{a_n\}$ は α に収束するという. この時 α を $\{a_n\}$ の極限值と言い, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ で表す.

ここで正の数 $\varepsilon > 0$ は実数でも有理数でも良いが後で考える事にする. 定義 1.1 の意味を吟味してみよう.

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \end{aligned}$$

より a_n は $n \geq N$ の時 α から $\pm\varepsilon$ の間に収まっていると言える. つまり, どんなに小さな数 $\varepsilon > 0$ をとってきても, 自然数 N を十分大きくとれば $n \geq N$ では a_n が $\alpha \pm \varepsilon$ の間に収まると言える.

ε に依存して N が決まるので $N(\varepsilon)$ とか N_ε と書いた方がわかりやすいかもしれないが慣習に従い単に N と書く.

定義 1.1 はそのままだと文章が長くなるので次のように省略して書かれることがある.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

ここで \forall は「任意の〜に対して」を, \exists は「ある〜が存在して」を意味する. s.t. は such that の略で, 「となるような」と訳すと分かりやすいと思う. 他にも,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

など, 人によって省略の仕方はいろいろあると思う.

\forall, \exists の記号の良さは, 命題の否定を考える時に顕著になる. 例えば, 「数列 $\{a_n\}$ が α に収束しない」とは

「ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の自然数 N に対し, $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ となるような $n \geq N$ が存在」

であるが, こんがらがってくると思う. \forall, \exists の記号を使うと

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}; |a_n - \alpha| \geq \varepsilon \text{ となる } n \geq N \text{ が存在}$$

で, 単に \forall と \exists の記号を入れ替えて, 最後の部分を否定すれば良いだけになる.

訓練のため, まず定義 1.1 を満たす α は唯一つに決まるか考えてみよう.

命題 1.2. 数列 $\{a_n\}$ の極限值は存在すればただ一つである.

証明. α_1 と α_2 をそれぞれ定義 1.1 を満たすものとする. よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ で

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha_1| < \varepsilon, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - \alpha_2| < \varepsilon$$

を満たすものがとれる. よって $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ならば

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = |\alpha_2 - a_n + a_n - \alpha_1| \leq |\alpha_2 - a_n| + |a_n - \alpha_1| < 2\varepsilon \text{ となる.}$$

ここで $\alpha_1 \neq \alpha_2$ と仮定すると $|\alpha_2 - \alpha_1| > 0$ だから ε として $|\alpha_2 - \alpha_1|/2$ がとれるが

$$|\alpha_2 - \alpha_1| < 2\varepsilon = |\alpha_2 - \alpha_1|$$

となってしまう矛盾. つまり $\alpha_1 = \alpha_2$ だったことになる. \square

命題 1.3. $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束する数列で $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とする.

(1) すべての n に対し $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

証明. (1) と (2) のみ示す.

(1) 背理法で示す. $\alpha > \beta$ 即ち $\alpha - \beta > 0$ と仮定する. $\varepsilon = (\alpha - \beta)/2 (> 0)$ とおくと $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ α と β に収束する事から, 自然数 N_1 と N_2 で,

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon$$

となるものが存在する. よって $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ならば

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= (\alpha - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - \beta) \\ &\leq (\alpha - a_n) + (b_n - \beta) \\ &\leq |\alpha - a_n| + |b_n - \beta| < 2\varepsilon = \alpha - \beta \end{aligned}$$

つまり $\alpha - \beta < \alpha - \beta$ で矛盾.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N で, $n \geq N$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$ となるものを見つければ良い. α と β はそれぞれ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の極限值であるから, 自然数 N_1 と N_2 で,

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon/2, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon/2$$

となるものが存在する. $N = \max\{N_1, N_2\}$ と置けば, $n \geq N$ に対して,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

となり, そのような N が確かに見つかった. \square

命題 1.4. $a_n \leq b_n \leq c_n$ で, $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ が同じ値 α に収束する時, $\{b_n\}$ も α に収束する.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ が α に収束することから $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ($n \geq N_1$) となる N_1 , $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ ($n \geq N_2$) となる N_2 がとれる. $N = \max\{N_1, N_2\}$ と置くと $n \geq N$ に対して, $a_n - \alpha \leq b_n - \alpha \leq c_n - \alpha$ より

$$|b_n - \alpha| \leq \max\{|a_n - \alpha|, |c_n - \alpha|\} < \varepsilon.$$

\square

2. 実数の連続性

2.1. 上界・下界, 最大値・最小値. $A \subset \mathbb{R}$ を実数の集合とする. $a \in A$ ならば $a \leq r$ となる実数 $r \in \mathbb{R}$ を A の上界という. $a \in A$ ならば $a \leq r$ となる $r \in A$ を A の最大値という. つまり, 上界のうち A の元になっているものを最大値というのである.

同様に $a \in A$ ならば $a \geq r$ となる実数 $r \in \mathbb{R}$ を A の下界カカイと言ひ, $a \in A$ ならば $a \geq r$ となる $r \in A$ を A の最小値という. 即ち A の元である下界が最小値である.

例 2.1.

$$A_1 = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$$

とすると 1, 2, 1.1, 3/2, $\sqrt{2}$ などは A_1 の上界で, 1 は A_1 の最大値でもある. 0, -1, -10, -1/2 などは A_1 の下界である. A_1 の最小値は存在しない.

$$A_2 = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

とすると A_2 の上界は存在しない. よって最大値も存在しない. 0, -1, -10, -1/2 などは A_2 の下界であるが, A_2 の最小値は存在しない.

問題 2.2. 実数の集合 $A \subset \mathbb{R}$ の最大値 (最小値) は存在すれば一つである事を示せ. (唯一つなので最大値を $\max A$, 最小値を $\min A$ で表す.)

上界が存在する時, 実数の集合 A は上に有界であるという. 同様に下界が存在する時, 下に有界であるという. A が上にも下にも有界である時は単に, A は有界であるという. 例えば, 例 2.1 の A_1 は有界で, A_2 は下に有界ではあるが, 上に有界ではない.

2.2. 上限・下限. $A \subset \mathbb{R}$ を実数の集合とする. 実数 $r \in \mathbb{R}$ が2つの条件

(S1) $a \in A$ ならば $a \leq r$ ($\iff r$ は A の上界),

(S2) $s < r$ となる実数 s に対して, $s < a$ となる $a \in A$ が存在する,

を満たす時, r を A の上限¹と言ひ $\sup A$ で表す. r が条件

(I1) $a \in A$ ならば $r \leq a$ ($\iff r$ は A の下界),

(I2) $r < s$ となる実数 s に対して, $a < s$ となる $a \in A$ が存在する,

を満たす時, r を A の下限と言ひ $\inf A$ で表す.

例 2.3.

$$A_1 = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$$

とすると, 1 は A_1 の上限であり, 最大値でもある. 0 は下限であるが, 最小値は存在しない.

例 2.3 から, 最大値 (最小値) が定義できない集合に対して, 最大値っぽい (最小値っぽい) ものとして上限 (下限) が定義されたと言える. 一般に次が成り立つ.

命題 2.4. $A \subset \mathbb{R}$ を実数の集合とする.

(1) A の最大値は, 存在すれば, 上限である. A の最小値は, 存在すれば, 下限である.

(2) A の上界全体の集合の最小値は, 存在すれば, 上限である. A の下界全体の集合の最大値は, 存在すれば, 下限である. (上限は最小上界, 下限は最大下界.)

証明. (1) r を A の最大値とする. (S1) $a \in A$ ならば $a \leq r$ であることは最大値の定義から明らか. (S2) s を $s < r$ となる実数とする. $a = r \in A$ とすれば $s < a$ となる $a \in A$ を与える. 最小値の場合も同様.

(2) X を A の上界全体の集合とする. X の最小値を m とおくと m は X の元だから A の上界である. よって m は (S1) を満たす. s を $s < m$ となる実数とする. $s < a$ となる $a \in A$ が存在しないと仮定して矛盾を導く.

$$s < a \text{ となる } a \in A \text{ が存在しない}$$

$$\iff a \in A \text{ ならば } s \geq a$$

$$\iff s \text{ は } A \text{ の上界}$$

$$\iff s \in X$$

$s < m$ であるからこれは m が X の最小値であることに矛盾する. \square

条件 (S1) で上界が存在する事を要求しているのだから, 上に有界な集合でないと上限は存在しない. 同様に条件 (I1) で下界が存在する事を要求しているのだから, 下に有界な集合でないと下限は存在しない. 逆に上に有界な集合には必ず上限が存在すること (下に有界な集合には必ず下限が存在すること) は, 実は実数の重要な性質なのである.

事実 2.5. $A \subset \mathbb{R}$ は空集合でないとする. A が上に有界ならば A は上限を持つ. A が下に有界ならば A は下限を持つ.

この事実は実数の連続性と呼ばれている. しばらくの間は事実 2.5 を認めて話を進めていく. 後に有理数から実数を事実 2.5 を満たすように構成する方法を紹介する.

¹日常用語での「上限」は上界を意味する事が多いのでまぎらわしい. 英語では上界が upper bound, 上限が supremum なので問題ない.

- 命題 2.6.** (1) 自然数全体の集合 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ は上に有界ではない
 (2) 実数 $a > b > 0$ に対して $a < nb$ となる自然数 n が存在する。
 (3) 実数 $a > 0$ に対して $a > p/q > 0$ となる有理数 p/q が存在する。

証明. (1) \mathbb{N} が上に有界ならば事実 2.5 により上限 r を持つ。
 $r - 1 < r$ より $r - 1 < n$ となる自然数 n が存在する。よって $r < n + 1 \in \mathbb{N}$ であるが、これは r が上限 (特に上界) である事に矛盾する。

(2) \mathbb{N} は上に有界ではない事から $a/b < n (\Leftrightarrow a < nb)$ となる自然数 n が存在する。

(3) \mathbb{N} は上に有界ではない事から $1/a < n$ となる自然数 n が存在する。よって $a > 1/n > 0$ 。□

特に $\varepsilon > 0$ となる実数 ε に対して $\varepsilon > p/q > 0$ となる有理数がとれるから、定義 1.1 において $\varepsilon > 0$ を有理数と仮定してしまっても構わない。

問題 2.7. 実数の組 $a < b$ に対して $a < p/q < b$ となる有理数 p/q が存在する事を示せ。

定義 2.8. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq M$ となるような M が存在する時、数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるという。

\forall, \exists の記号を使えば $\{a_n\}$ が上に有界とは

$$\exists M \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq M$$

と表される。下に有界も同様に定義される。上にも下にも有界な数列は単に有界な数列と呼ばれる。

命題 2.9. 上に有界な単調増加数列 $(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots)$ は収束する。下に有界な単調減少数列 $(a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots)$ は収束する。

証明. $A = \{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ と置く。 $\{a_n\}$ は上に有界であることから A は上に有界な集合である。事実 2.5 により A の上限 α が存在する。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\alpha - \varepsilon < \alpha$ だから (S2) より $\alpha - \varepsilon < a_N$ となる N が存在する。 $n \geq N$ ならば

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq \dots \leq a_n$$

だから

$$(2.1) \quad -\varepsilon < a_n - \alpha$$

一方で (S1) より $a_n \leq \alpha$ だから、

$$(2.2) \quad a_n - \alpha \leq 0 < \varepsilon$$

(2.1) と (2.2) より $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる。

下に有界な場合も同様に示せるが、数列 $\{-a_n\}$ を考えれば、上に有界な場合に帰着される。□

証明より、上に有界な単調増加数列 $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ の極限值 α は $a_n \leq \alpha (\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすことを注意しておく。

数列 $\{a_n\}$ に対し、自然数の増加列 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ を使って $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と書ける数列を $\{a_n\}$ の部分列と言う。

定理 2.10 (Bolzano-Weierstrass). 有界な数列は収束部分列を持つ。

証明. $\{a_n\}$ を有界な数列とすると、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_1 \leq a_n \leq q_1$ となる実数 p_1, q_1 がとれる。 p_1 と q_1 の中点 $r_1 = (p_1 + q_1)/2$ をとると、無限個の a_n が $[p_1, r_1]$ または $[r_1, q_1]$ のいずれかに入る。無限個の a_n が入る方を $[p_2, q_2]$ と置く (両方ともに無限個入る場合はどちらか一方を選ぶ)。ここで $p_1 \leq p_2 \leq q_2 \leq q_1$ となる。次に $[p_2, q_2]$ の中点 r_2 に対して同じ方法で p_3, q_3 を定め、順に $p_4, q_4, p_5, q_5, \dots$ を定める。構成の仕方から

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq q_3 \leq q_2 \leq q_1.$$

だから $\{p_n\}$ は上に有界な単調増加数列、 $\{q_n\}$ は下に有界な単調減少数列となる。命題 2.9 より極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ が存在する。また

$$q_1 - p_1 = 2(q_2 - p_2) = 2^2(q_3 - p_3) = \dots = 2^{n-1}(q_n - p_n)$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(q_1 - p_1)}{2^{n-1}} = 0$$

だから $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ 。ここで自然数 k に対し n_k を $a_{n_k} \in [p_k, q_k]$ となるように選ぶ。 ($[p_k, q_k]$ は無限個の a_n を含むので選べる。) $p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$ かつ $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k$ であるから命題 1.4 より $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ が存在する。□

3. コーシー列

定義 3.1. $\{a_n\}$ を数列とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、 $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となる時、 $\{a_n\}$ はコーシー (Cauchy) 列であるという。

\forall, \exists の記号を使うと $\{a_n\}$ がコーシー列であることは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

と表される。

定理 3.2. 収束する数列はコーシー列である。

証明. $\{a_n\}$ は α に収束するとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する。この時 $m, n \geq N$ ならば、

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - \alpha + \alpha - a_n| \\ &\leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

定理 3.3. コーシー列は収束する。

証明. まずコーシー列が有界であることを示す。実際、 $\varepsilon > 0$ として 1 をとれば、ある N が存在して $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < 1$ とできる。とくに $n \geq N$ ならば $|a_N - a_n| < 1$ だから $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は有界。よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も有界。

よって定理 2.10 より $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を持つ。この極限值を α と置く。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\{a_n\}$ がコーシー列であることから、ある N' が存在して、 $m, n \geq N'$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ とできる。 $\{a_{n_k}\}$ が収束することから、 $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon/2 (\forall k \geq l)$ となる l がとれるが、特に $n_k \geq N'$ となるように k を選ぶと、 $n \geq N'$ に対して

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となり $\{a_n\}$ は α に収束する。□

4. 同値関係

集合 X の直積集合 $X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$ の部分集合 R を関係と言う。 X の 2 つの元 x, y に対して、 $(x, y) \in R$ の時、 $x \sim y$ と書くことにする。

定義 4.1. 次の 3 つの性質を満たす関係 \sim を同値関係と言う。

- (1) $x \sim x$ (反射律)
- (2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (対称律)
- (3) $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (推移律)

例 4.2. 整数全体の集合 \mathbb{Z} と 0 でない整数 n に対し

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ は } n \text{ の倍数}$$

で定義するとこれは同値関係。実際、 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ に対して、

- (1) $x - x = 0$ は n の倍数だから $x \sim x$
- (2) $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ が n の倍数 $\Leftrightarrow y - x$ が n の倍数 $\Leftrightarrow y \sim x$

- (3) $x \sim y$ かつ $y \sim z \Leftrightarrow x - y$ と $y - z$ が n の倍数 \Rightarrow
 $(x - y) + (y - z) = x - z$ が n の倍数 $\Leftrightarrow x \sim z$
(この同値関係は $x \equiv y \pmod{n}$ と書かれる.)

定義 4.3. \sim を X の同値関係とする. $x \sim y$ となる X の元たちを同一視した集合を (X の \sim による) 商集合とよび, X/\sim で表す.

問題 4.4. 例 4.2 の \mathbb{Z} の同値関係 $\equiv \pmod{n}$ による商集合は n 個からなる集合であることを示せ.

5. 実数の構成

それでは有理数から実数を構成しよう. 有理数の数列 $\{a_n\}$ のうち, コーシー列²となるものを考える. 即ち, 任意の正の有理数 $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在して,

$$m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

となるものを考える. このような有理数の列全体の集合を X と書くことにする. $\{a_n\}, \{b_n\} \in X$ に関係 \sim を

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \text{任意の有理数 } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある自然数 } N \text{ が存在して, } m, n \geq N \text{ ならば } |a_m - b_n| < \varepsilon$$

で定義すると, これは同値関係になる. 実際, (1) 反射律と (2) 対称律は明らか. (3) 推移律を示す. $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ かつ $\{b_n\} \sim \{c_n\}$ とする. $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ を示したい. つまり, 任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対して, $m, n \geq N$ ならば $|a_m - c_n| < \varepsilon$ となる自然数 N を見つければよい. $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ と $\{b_n\} \sim \{c_n\}$ から,

$$m, n \geq N_1 \Rightarrow |a_m - b_n| < \varepsilon/2$$

$$m, n \geq N_2 \Rightarrow |b_m - c_n| < \varepsilon/2$$

となる N_1 と N_2 が存在する. N_1 と N_2 の大きい方を N と置けば, $m, n, l \geq N$ に対して

$$|a_m - c_n| \leq |a_m - b_l| + |b_l - c_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

で推移律が示された.

定義 5.1. 有理数のコーシー列全体の集合の同値関係 \sim による商集合を \mathbb{R} と書く. \mathbb{R} の元を実数と呼ぶ.

つまり, 有理数のコーシー列たちを関係 \sim で同一視したものを実数と呼ぶのである.

有理数 p/q に対して, 全ての n に対して $a_n = p/q$ となる数列 $\{a_n\}$ は有理数のコーシー列である. 異なる有理数に対しては同値でないコーシー列になる事が示せるので, 有理数の集合 \mathbb{Q} を実数の集合 \mathbb{R} の部分集合とみなせる.

例 5.2. 有理数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = 1, \quad b_n = 1 - \frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{9 \cdots 9}_n$$

で定義すると, $|a_m - b_n| = 1/10^n$ より, 任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対し, $1/\varepsilon < 10^N$ となるように N をとれば, $n, m \geq N$ ならば $|a_m - b_n| = 1/10^n \leq 1/10^N < \varepsilon$. よって $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ実数を表す. つまり $1 = 0.99 \cdots$.

例 5.3. q_0 を整数, $q_k (k \geq 1)$ は $0 \leq q_k \leq 9$ となる整数とする.

$$p_n = q_0 + \frac{q_1}{10^1} + \frac{q_2}{10^2} + \cdots + \frac{q_n}{10^n} = q_0.q_1q_2 \cdots q_n$$

は有理数の数列で, $m, n \geq N$ のとき $|q_m - q_n| < 1/10^N$ だから, これはコーシー列となる.

²前節では実数の範囲で定義したが, 以下の通り, 有理数の範囲でも同様に定義できる. まぎらわしい時には有理数のコーシー列と呼ぶ事にする.

以下, 有理数列 $\{a_n\}$ で代表される実数を $[a_n]$ と書く事にする. 有理数のコーシー列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して

$$(5.1) \quad \begin{aligned} [a_n] \pm [b_n] &:= [a_n \pm b_n] \\ [a_n] \cdot [b_n] &:= [a_n b_n] \end{aligned}$$

で $+$, $-$, \cdot (かけ算) を定める. 但し, $\{a_n\} \sim \{a'_n\}, \{b_n\} \sim \{b'_n\}$ となる有理数のコーシー列に対して,

$$[a_n \pm b_n] \sim [a'_n \pm b'_n], \quad [a_n b_n] \sim [a'_n b'_n]$$

となることを示さないとちゃんと定義 (well-defined) できた事にならない. 前者は簡単なので後者のみ示す.

$$\begin{aligned} |a_m b_m - a'_n b'_n| &= |a_m(b_m - b'_n) + (a_m - a'_n)b'_n| \\ &\leq |a_m||b_m - b'_n| + |a_m - a'_n||b'_n| \end{aligned}$$

ここで, 定理 3.3 の証明にあるように, コーシー列は有界であるから, ある $M > 0$ が存在して,

$$|a_n|, |b'_n| \leq M \quad (n \in \mathbb{N})$$

とできる. また $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ と $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N で

$$m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a'_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_m - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となるものがとれる. よって $n \geq N$ に対して,

$$\begin{aligned} |a_m b_m - a'_n b'_n| &\leq |a_m||b_m - b'_n| + |a_m - a'_n||b'_n| \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

だから, $\{a_n b_n\} \sim \{a'_n b'_n\}$ が示された.

命題 5.4. 有理数のコーシー列 $\{a_n\}$ は次のいずれか 1 つを満たす:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (2) 有理数 $c > 0$ と自然数 N が存在して $n \geq N \Rightarrow a_n > c$
- (3) 有理数 $c > 0$ と自然数 N が存在して $n \geq N \Rightarrow a_n < -c$

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ とする. 即ち, ある有理数 $\varepsilon > 0$ に対して, どのような自然数 N' をとってきても,

$$|a_n| = |a_n - 0| \geq \varepsilon$$

となる $n \geq N'$ が存在する. 一方で $\{a_n\}$ はコーシー列である事から, この ε に対してある N_1 で $m, n \geq N_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2$, 即ち,

$$(5.2) \quad m, n \geq N_1 \Rightarrow -\varepsilon/2 < a_m - a_n < \varepsilon/2$$

となるものが存在する. 上の N' として N_1 を取ればある $N \geq N_1$ で $|a_N| \geq \varepsilon$ となるもの, 即ち

$$(5.3) \quad a_N \geq \varepsilon \text{ または } a_N \leq -\varepsilon$$

となるものがとれる. $n \geq N$ となる n に対して, $n \geq N \geq N_1$ だから (5.2) と (5.3) より

$$a_n = (a_n - a_N) + a_N > -\varepsilon/2 + \varepsilon = \varepsilon/2$$

または

$$a_n = (a_n - a_N) + a_N < \varepsilon/2 - \varepsilon = -\varepsilon/2$$

となる. よって $c = \varepsilon/2$ と, この N を取ればよい. \square

(2) の時 $[a_n] > 0$, (3) の時 $[a_n] < 0$ と書く事にする. また $[a_n] - [b_n] = [a_n - b_n] > 0$ の時, $[a_n] > [b_n]$ と書く事にする.

問題 5.5. 実数 $[a_n], [b_n], [c_n]$ に対して次を示せ:

- (1) $[a_n] > [b_n]$ かつ $[b_n] > [c_n]$ ならば $[a_n] > [c_n]$
- (2) $[a_n] > [b_n]$ ならば $[a_n] + [c_n] > [b_n] + [c_n]$
- (3) $[a_n] > 0, [b_n] > 0$ ならば $[a_n][b_n] > 0$

(4) 全ての n に対して $a_n \leq b_n$ ならば $[a_n] \leq [b_n]$

不等号 $>$ が定まることで, §2.2 と同様に実数の部分集合に対して上限や下限が定義される. 不等号 $>$ の定義と命題 5.4 から, 次が直ちに従う.

系 5.6. $[a_n] > 0$ ならば, $[a_n] > c > 0$ となる正の有理数 c が存在する.

証明. 命題 5.4 より有理数 $c' > 0$ と自然数 N で $N \geq n \Rightarrow a_n > c'$ となるものがある. 問 5.5 (4) より $[a_n] \geq c'$ だから有理数 $c = c'/2$ は $[a_n] > c > 0$ を満たす. (問 5.5 (4) を適用する際, 正確には $n \geq N$ で $a_n > c'$ だが, $n < N$ の部分を適当に変えても得られる実数は同じなので問題ない.) \square

定義 5.7. 実数 $[a_n]$ の絶対値を, 命題 5.4 の (1) の時 0 , (2) の時 $|[a_n]| = [a_n]$, (3) の時 $|[a_n]| = [-a_n]$ でそれぞれ定義する. (定義から $|[a_n]| \geq 0$ となる.)

問題 5.8. 実数 $[a_n], [b_n]$ に対して次を示せ:

- $|[a_n]| = |[a_n]|$
- $|[a_n] + [b_n]| \geq |[a_n]| + |[b_n]|$
- $|[a_n][b_n]| = |[a_n]| |[b_n]|$

不等号 $<$ と絶対値 $||$ が定まることで, 定義 1.1 で実数列に対する収束やコーシー列の定義が定まる. ただし系 5.6 から $\varepsilon > 0$ は有理数のみを考えれば良い.

命題 5.9. $\{a_n\}$ を有理数のコーシー列とする. 数列 $\{a_n\}$ を実数の数列とみなした時, この数列は実数 $[a_n]$ に収束する.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ となる ε' をとる. $\{a_n\}$ は有理数のコーシー列だから, $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon'$ となる自然数 N が存在する. a_m の方は m を固定して有理数とみなし, a_n の方は数列が表す実数 $\alpha = [a_n]$ とみなす. この時 $m \geq N$ ならば

$|a_m - \alpha| = |a_m - [a_n]| = |[a_m - a_n]| = |[a_m - a_n]| \leq \varepsilon' < \varepsilon$
(ここで $|a_m - a_n| < \varepsilon'$ ($m, n \geq N$) だから問 5.5 (4) より $|[a_m - a_n]| \leq \varepsilon'$.) よって $\{a_m\}$ は $\alpha = [a_n]$ に収束する. \square

命題 5.10. $A \subset \mathbb{R}$ は空集合でないとする. A が上に有界ならば A は上限を持つ.

証明. 実数の部分集合 X, Y を次で定義する:

$$Y = \{r \in \mathbb{Q} \mid \text{全ての } a \in A \text{ に対して } a \leq r\}$$

$$X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \notin Y\}$$

A が上に有界であることから $Y \neq \emptyset$, A が空集合でないことから $X \neq \emptyset$ である. $x \in X$ と $y \in Y$ に対して, $x \notin Y$ だから $x \neq y$. よって $x < y$ または $y < x$ だが, $y < x$ ならば全ての $a \in A$ に対して $a \leq y < x$ だから $x \notin Y$ に矛盾する. よって $x \in X, y \in Y$ ならば $x < y$.

有理数の数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次のように定義する. まず $x \in X$ と $y \in Y$ を固定し, $x_1 = x < y = y_1$ とする. x_1 と y_1 の中点 $(x_1 + y_1)/2 \in \mathbb{Q}$ は X か Y のどちらかに入るが, X に入る時 $x_2 = (x_1 + y_1)/2, y_2 = y$, Y に入る時 $x_2 = x, y_2 = (x_1 + y_1)/2$ と定める. 特に $x_2 \in X, y_2 \in Y$ となる. 同様に x_n, y_n から x_{n+1}, y_{n+1} を定める. 定義から $x_n \in X, y_n \in Y$ で, $|y_n - x_n| = (y - x)/2^n$ と $|x_{n+1} - x_n|, |y_{n+1} - y_n| \leq (y - x)/2^n$ が成り立つ. よって $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は同値な有理数のコーシー列である. 以下 $[x_n] = [y_n]$ が上限である事を示す.

まず §2.2 の (S1), 任意の $a \in A$ に対して $a \leq [y_n]$, を確かめる. 実際, 全ての n について $y_n \in Y$ より $a \leq y_n$ だから $a \leq [y_n]$.

次に (S2) $r < [x_n]$ となる実数 r に対して, $r < a$ となる $a \in A$ が存在する事, を示す. $r < [x_n]$ であるから, $r < x_k$

となる k が存在する. $x_k \in X$ より $a > x_k$ となる $a \in A$ が存在する. よって $r < x_k < a$ となる $a \in A$ が存在する. \square

命題 5.10 により, §2 で認めていた事実 2.5 が示せた. よって事実 2.5 から導いた命題 2.6, 2.9, 定理 2.10, 3.3 も確かに成り立つこととなる.

任意の実数 r に対して, 命題 2.6 から $r < q$ となる整数 q が存在する. このような q のうち, 最小のものを $q_0 + 1$ とおけば, $q_0 \leq r < q_0 + 1$ となる. $0 \leq 10(r - q_0) < 10$ だから, $q_1 \leq 10(r - q_0) < q_1 + 1$ となる整数 $0 \leq q_1 \leq 9$ を選ぶ. 次に $0 \leq 10(10(r - q_0) - q_1) < 10$ だから $q_2 \leq 10(10(r - q_0) - q_1) < q_2 + 1$ となる整数 $0 \leq q_2 \leq 9$ を選ぶ. これを繰り返し q_k を定義すると,

$$q_0 + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_k}{10^k} \leq r < q_0 + \frac{q_1}{10} + \dots + \frac{q_k}{10^k} + \frac{1}{10^{k+1}}$$

となる. $p_n = q_0.q_1q_2 \dots q_k$ とおくと $\{p_n\}$ は r に収束することが示せるので, 全ての実数は小数で表すことができる.

6. 濃度

f を集合 A から集合 B への写像とする ($f: A \rightarrow B$).

- 全ての $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在する時, f は全射であるという.
- 全ての $a_1, a_2 \in A$ に対して $f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$ である時, f は単射であるという.
- 全射かつ単射の写像を全単射という.

$f: A \rightarrow B$ が全単射の時, $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ を対応させることで B から A への写像を定義することができる. これを f の逆写像といい, $f^{-1}: B \rightarrow A$ で表す. 逆写像は全単射になることがわかる.

定義 6.1. 集合 A から B への全単射が存在する時, A と B は濃度が等しいといい, $A \sim B$ と表す.

問題 6.2. 濃度が等しいという関係は同値関係であることを示せ. 実際次が示せる:

- (1) 恒等写像 $\text{id}: A \rightarrow A$ ($\text{id}(a) = a$ で定義) は全単射.
- (2) 全単射の逆写像 $f^{-1}: B \rightarrow A$ は全単射.
- (3) $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ が全単射なら, 合成写像 $g \circ f: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ も全単射.

例 6.3. (1) A と B が有限集合の時には, 濃度が等しいとは A と B の個数が等しいということに他ならない. よって無限集合の場合が興味深い.

(2) 自然数全体と正の偶数全体は同じ濃度. 実際 $f(n) = 2n$ と定義すると, これが全単射を与える.

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 6, \quad \dots$$

(3) 自然数全体 \mathbb{N} と整数全体 \mathbb{Z} の濃度は等しい. 実際, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} -k & (n = 2k + 1 (k = 0, 1, \dots) \text{ の時}) \\ k & (n = 2k (k = 1, 2, \dots) \text{ の時}) \end{cases}$$

で定義すると, これが全単射を与える.

$$1 \mapsto 0, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto -1, \quad 4 \mapsto 2, \quad \dots$$

(4) 自然数全体 \mathbb{N} と $\mathbb{N}^2 = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ の濃度は等しい. 実際,

$$1 \mapsto (1, 1), \quad 2 \mapsto (2, 1), \quad 3 \mapsto (1, 2), \quad 4 \mapsto (3, 1), \\ 5 \mapsto (2, 2), \quad 6 \mapsto (1, 3), \quad 7 \mapsto (4, 1), \quad \dots$$

の様に全単射が作れる. 濃度が等しいという関係は同値関係なので, 一般に, $X \sim Y \sim \mathbb{N}$ ならば積集合 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ と \mathbb{N} の濃度が等しい事がわかる.

(5) 自然数全体 \mathbb{N} と有理数全体 \mathbb{Q} の濃度は等しい. これは次の様にして示される. \mathbb{Q} の元は既約分数 p/q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$) で一意に表されるので, $f(p/q) = (p, q)$ は \mathbb{Q} から $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ への単射を与える. (4) より $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ から \mathbb{N} への全単射が存在する. よって \mathbb{Q} を \mathbb{N} の部分集合とみなせる. これに 1 から順に番号付けていけば, \mathbb{Q} から \mathbb{N} への全単射が得られる. (6) 开区間 (a, b) (但し $a < b$) と実数全体 \mathbb{R} の濃度は等しい. 実際 $(a, b) \xrightarrow{f} (-1, 1) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ を $f(x) = \frac{2}{b-a}(x-a) - 1$ と $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$ で与えると, これらは全単射となる. (7) 半开区間 $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ と开区間 $(0, 1)$ の濃度は等しい. 実際

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 0 \\ x/2 = 1/2^{n+1} & x = 1/2^n \ (n = 1, 2, \dots) \\ x & x \neq 0, 1/2^n \ (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

が $[0, 1)$ から $(0, 1)$ への全単射を与える. 同様に工夫すれば, 开区間 $(0, 1)$ と閉区間 $[0, 1]$ の濃度が等しい事も示せる. (6) と合わせて, \mathbb{R} と $[0, 1)$ や $[0, 1]$ の濃度が等しい事がわかる.

定理 6.4. 自然数全体 \mathbb{N} と実数全体 \mathbb{R} の濃度は異なる.

証明. \mathbb{R} と $[0, 1)$ は濃度が等しいので, \mathbb{N} と $[0, 1)$ の濃度が異なることを示せばよい. 全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$ が存在したと仮定して矛盾を導く. 各 $f(n)$ の小数展開を考える.

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

但し, 有限小数は $0.1 = 0.1000\dots$ のように表す事とする. (つまり $0.1 = 0.0999\dots$ のようには表さない事とする. また $f(n)$ は $1.0 = 0.999\dots$ を含まない事に注意.)

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_{nn} = 0 \text{ の時}) \\ 0 & (a_{nn} \neq 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

で実数 $b = 0.b_1b_2b_3\dots$ を定義すると $b \in [0, 1)$ となる. 定義よりどのような n に対しても $a_{nn} \neq b_n$ だから $f(n) \neq b$ である. これは f が全射である事に矛盾する. \square

この証明の方法は対角線論法と呼ばれている.

7. 有理数の切断による実数の定義と補足

定義 7.1. 有理数全体の集合 \mathbb{Q} の部分集合の組 (A, B) は

- $A \cup B = \mathbb{Q}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ (非交和と呼ばれ $A \sqcup B$ と書かれる事が多い)
- A と B は空集合でない
- $a \in A, b \in B$ ならば $a < b$

を満たす時, 有理数の切断と呼ばれる.

例 7.2. (1) 有理数 r に対して,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}, & B_1 &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}, & B_2 &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq r\} \end{aligned}$$

と定義すると, 組 A_1, B_1 と A_2, B_2 はそれぞれ有理数の切断である. 一般に有理数の切断 (A, B) は, A が最大値 r を持つ場合 (A_1, B_1) の形に, B が最小値 r を持つ場合 (A_2, B_2) の形に書ける事がわかる.

(2) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ と $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$ は有理数の切断を与える. この時, A の最大値や B の最小値は存在しない.

有理数の切断全体を, 例 7.2 (1) の場合には (A_1, B_1) と (A_2, B_2) を同じ物と同一視する事で得られる集合は, 実は \mathbb{R} (有理数のコーシー列全体を同値関係で同一視したもの) とみなせる. 実際, 切断 (A, B) に対して命題 5.10 の証明の方法でコーシー列を作ると, 切断全体の集合 (上に述べた様に一部を同一視する) から \mathbb{R} への全単射を与える.

7.1. 切断による実数の定義はコーシー列を使った定義よりも直感的に分かりやすいと思う. しかし, コーシー列を使った定義はより一般に距離空間の完備化という形に拡張できる.

定義 7.3. X を集合とする. 写像 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が, 全ての $x, y, z \in X$ に対し

- $d(x, y) \geq 0$ であり, $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

を満たす時, d を X の距離という. (X, d) の組は距離空間と呼ばれる.

例 7.4. (1) $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して $d(x, y) := |x - y|$ で定めるとこれは \mathbb{Q} の距離になる.

(2) p を素数とする. 0 でない有理数 x は p と互いに素な整数 a, b で $x = \frac{p^n a}{b}$ と書ける. ここで n は整数で, このような n は唯一つである. この時, $v_p(x) = n$ と書く事にする. $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して

$$d_p(x, y) := p^{-v_p(x-y)} \quad (\text{但し } x = y \text{ の時は } 0 \text{ と定義})$$

と定めると d_p は \mathbb{Q} の距離になる.

(3) n 次元ベクトル空間

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

に対して $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ と定めると d は \mathbb{R}^n の距離になる.

(4) 次の集合は無限次元のベクトル空間と思える.

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots) \\ x_i \neq 0 \text{ となる } i \text{ は有限個とする}\}$$

ここで d を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_i)^2}$ で定義する³とこれは \mathbb{R}^∞ の距離になる.

定義 7.5. 距離空間の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は, 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

を満たす時, コーシー列であるという.

X のコーシー列全体を実数を構成した時と同様の同値関係で割った集合を X の完備化と言う.

\mathbb{Q} の d_p による完備化は p -進数と呼ばれ \mathbb{Q}_p と書かれる. これは特に数論と呼ばれる分野で用いられる. \mathbb{R}^∞ の完備化はヒルベルト空間と呼ばれ, 解析学で重要な役割を果たす.

完備化が重要となる状況について非常に大雑把に述べる. 数学の問題は何かしらの方程式を解くという問題に帰着する. とは言っても, 一般には方程式を解く事は難しい. そこでまず近似解を作って, その極限として真の解を見つけるといった手法が考えられる. この極限が存在する世界が完備化した空間である. 解析学でならう中間値の定理を思い出せば, 連続性 (極限が存在する世界) は解を見つける際に重要である事が納得いただけるだろう. 特に上で挙げたヒルベルト空間は関数の住んでいる空間と思えるものであり, 微分方程式を解く際に役立つ.

³ $x_i \neq 0$ となる i は有限個と約束したので, $\sqrt{\quad}$ の中の無限和は実は有限和であり意味を持つ.