解析学I　授業概要

多変数関数の微分，微分方程式の解法を中心に

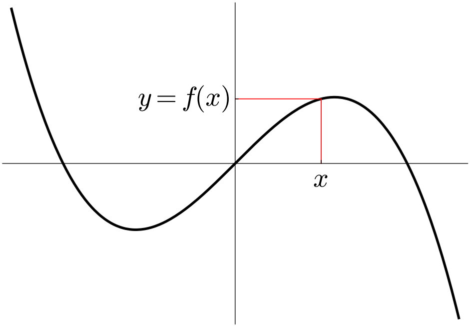
蒲谷祐一

2017 年度後期　演習第 1 回（10 月 2 日）

（Web 公開用：授業の進め方などを除いてある）

（1 変数）関数の微分

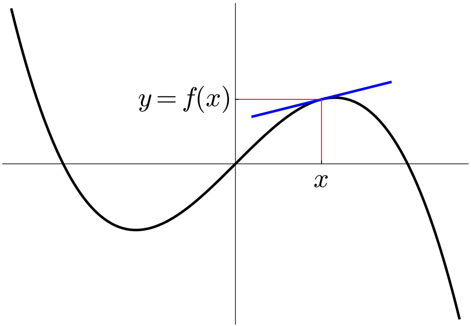
関数とは実数 x に実数 y を対応させるもの．$y = f(x)$ と表した．



工学や科学では，色々な量や現象を関数で表す．

（1 変数）関数の微分

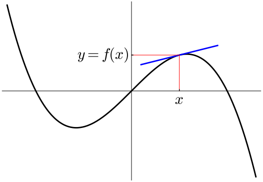
微分とは関数をある点の近くで直線で近似するもの.

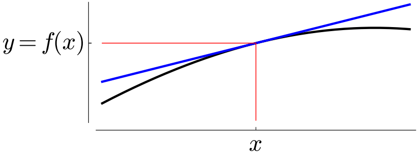


曲がっているものより，直線の方が簡単.

（1 変数）関数の微分

微分とは関数をある点の近くで直線で近似するもの.



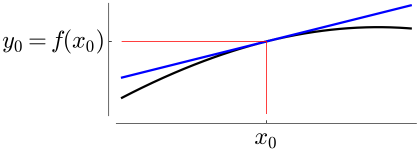


曲がっているものより，直線の方が簡単.

（1 変数）関数の微分

点 $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ を通る接線の方程式

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$ （点 (x_0, y_0) を通る，傾き $f'(x_0)$ の直線）



変形すると

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff f'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$

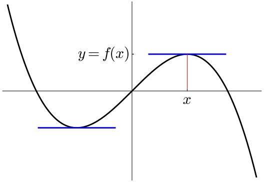
$$\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

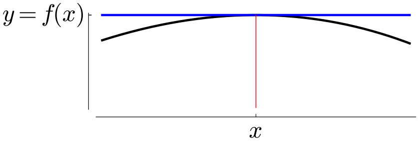
（$\cdot$ は内積）

つまりベクトル $\begin{pmatrix} f'(x_0) \\ -1 \end{pmatrix}$ と直行する直線.

（1 変数）関数の微分

近似ではあるが，重要な性質はとらえている．





例えば，

微分が 0 になる点で関数は極大・極小になっている可能性が高い．

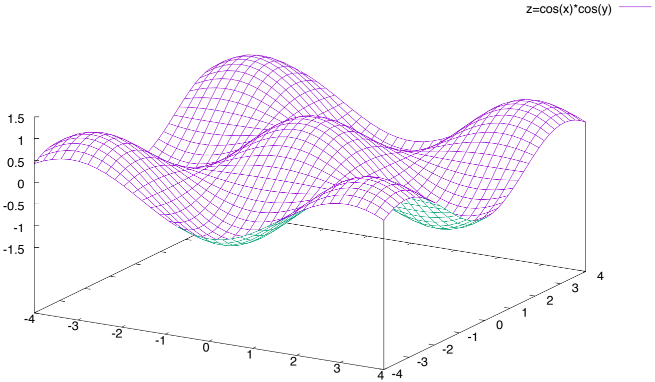
2 変数関数の微分

実数の組 (x, y) に対して実数 z が定まる，

$$z = f(x, y)$$

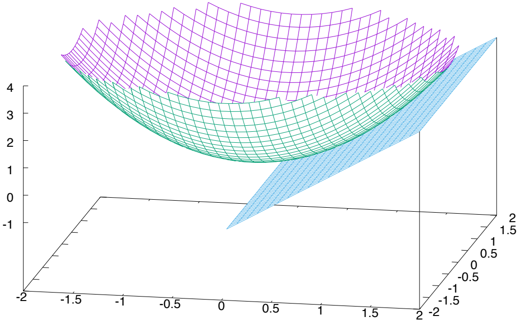
という関数を考える．

この時グラフは，「3 次元の空間の中の曲面」として表される．



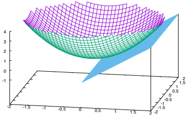
2 変数関数の微分

1 変数の時は，ある点で関数を「直線」で近似したが，2 変数の場合に近似するには「平面」を考える必要がある．



2 変数関数の微分

$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ を通る平面の方程式は



$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

で表された.

$$a = f_x(x_0, y_0), \quad b = f_y(x_0, y_0), \quad c = -1$$

のとき，この平面が曲面 $z = f(x, y)$ に (x_0, y_0, z_0) で接するように偏微分 f_x, f_y が定義される *. f_x, f_y は $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ とも書かれる.

$*$ 実際には，もっと機械的に偏微分を導入する.

2 変数関数の微分

まとめ

1 変数関数の微分：

x_0 での「接線」の方程式が

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

と表されるように f' を定義.

2 変数関数の（偏）微分：

(x_0, y_0) での「接平面」の方程式が

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

と表されるように f_x, f_y を定義.

2 変数関数の微分

式を変形すると次のようにも理解できる.

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$\iff z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\iff z - z_0 = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad \text{（右辺は行列の積）}$$

これは，関数 $z = f(x, y)$ （$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^1$ への写像）を (x_0, y_0) の近くで，1×2 行列

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

で表していると思える.

「微分とは関数を行列（線形写像）で近似すること」

微分方程式

1 変数関数の話に戻る．

工学や科学では，様々な現象が微分を含んだ方程式によって表される．

例 (自由落下)

質量 m の物体には mg の力が下方向に働く．質点 $x = x(t)$ の加速度は

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

だから，この物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \quad (*)$$

となる．$x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$ （x_0, v_0 は定数）と置けば $x(t)$ が $(*)$ を満たすことはすぐにわかる．

どうやって解くか？

微分方程式（例：自由落下）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg, \quad \text{両辺を } m \text{ で割って，} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g \quad (*)$$

$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ と置けば（$v(t)$ は速度を表す）

$$\frac{dv}{dt} = g$$

両辺を t で積分して，

$$v(t) = gt + v_0 \quad (v_0 \text{ は積分定数．初速．})$$

$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ を戻すと

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

もう一度両辺を t で積分して，

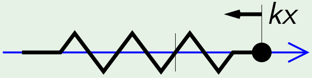
$$x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \quad (x_0 \text{ は積分定数．初期位置．})$$

このように不定積分で微分方程式を解く方法を「求積法」という．

微分方程式（例：単振動）

例 (単振動，調和振動)

バネにつながれた物体の運動を考える.



位置 x にある時に物体に働く力は $-kx$ より（k はバネ定数）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (**)$$

$x(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ とおけば

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) = -\frac{k}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = -\frac{k}{m}x(t)$$

より $(**)$ の解であることがすぐにわかる.

微分方程式（例：単振動）

微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (**)$$

の解として $x(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ が見つかったが，$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ や

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{（}A,\ B\text{ は定数）}$$

も $(**)$ の解である．

$(**)$ は「定数係数 2 階線形微分方程式」と呼ばれるものの特別な形．

授業では定数係数 2 階線形微分方程式の解法を学ぶ．

その他

- 有理関数 $\left(\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}\ \text{の形の関数}\right)$ の積分
  - 応用として三角関数や無理関数を含む関数の積分
- ライプニッツの公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

- テイラー展開

$$\text{例えば}\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \text{など}$$

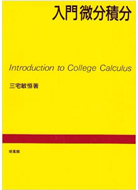
- ロピタルの定理
- 凸関数について

参考書

吹田信之，新保経彦「理工系の微分積分学」
（学術図書出版社 287 ページ 2,052 円）

値段とページ数のわりに内容が詳しく記述が正確．必要なことが一通り書かれているので持っていると便利．学生からは難しいと言われることが多いと思う．

三宅敏恒「入門微分積分」
（培風館 190 ページ 2,052 円）



最近多くの理工系大学で教科書として採用されているので，一応紹介しておく．上記の本と違い，難しい証明などを省略している．