

AGOL による VIRTUAL FIBERING CONJECTURE の解決について

蒲谷祐一 (KABAYA YUICHI)
(大阪大学理工学研究科数学専攻・学振 PD)

ABSTRACT. This is a short note in Japanese to understand Agol's works on the Virtual Haken Conjecture and the Virtual Fiberings Conjecture. This is just a survey note, contains no new results and contributions.

1. 予想の概観

このノートは、次の定理の証明を理解する事である：

定理 1.1 (Agol, Wise). M を有限体積である完備 3 次元双曲多様体とする。このとき M の有限被覆 $M' \rightarrow M$ で M' が S^1 上の曲面束となる物が存在する。

これは Thurston が [Thu82] の中で提出した 24 の問題でも特に有名な物で virtual fiberings conjecture として知られている。 M の有限被覆をとったときにある性質 P が成り立つとき M は virtual に P であるという。 Thurston はこの他にも virtual Haken 予想や virtual $b_1 > 0$ 予想について述べている。 その中でも上の定理が最も強い物である。 この節では 3 次元多様体の基本的な定義の復習から始め、 予想の内容、 証明の概略について述べる。

1.1. 基本的な定義。 このノートではとくに断りのない限り 3 次元多様体は向き付け可能であると仮定する。

定義 1.2. M を向き付け可能なコンパクト 3 次元多様体とする。

- M に埋め込まれた球面が M に埋め込まれた球の境界となる時、 M を既約という。
- F を曲面とする。 埋め込み $F \rightarrow M$ は $\partial F \subset \partial M$ で F が ∂M に直交しているとき *proper* であるという。 このノートでは曲面の 3 次元多様体への埋め込みは *proper* な物のみを考えることにする。
- F を球面または円板でない向き付けられた曲面とする。 埋め込み $i: F \rightarrow M$ は $i_*: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ が単射であるとき圧縮不可能 (*incompressible*) であるという。
- 既約な 3 次元多様体 M が圧縮不可能曲面を含むとき、 M は *Haken* であるという。
- $\pi_1(M)$ が部分群として $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ をもつとき、 それが境界の基本群の部分群に共役となるならば、 M は *atoroidal* であるという。

次の事実はよく知られている。

命題 1.3. $M (\neq B^3)$ を向き付け可能なコンパクト既約 3 次元多様体とする。

- $\partial M \neq \emptyset$ なら $b_1(M) > 0$ 。
- $b_1(M) > 0$ なら M は *Haken* 多様体。

$$\boxed{\partial M \neq \emptyset} \implies \boxed{b_1(M) > 0} \implies \boxed{M \text{ は } Haken}$$

一番目の主張は次のように示される。 M の境界に関するダブルを \widehat{M} とするとこれは閉 3 次元多様体である事から $2\chi(M) - \chi(\partial M) = \chi(\widehat{M}) = 0$ 。 よって $2\chi(\partial M) = \chi(M)$ 。 M は既約である事から境界に球面を持たないので $\chi(\partial M) \leq 0$ 。 $b_3(M) = 0$ より $b_1(M) = 1 + b_2(M) - \chi(M) = 1 + b_2(M) - 2\chi(\partial M) \geq 1 + b_2(M) \geq 1$ 。 二番目の主張は $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の非自明なホモロジー類を実現する曲面から圧縮不可能曲面が構成できることから従う。 例えば [Hat, Lemma 3.6], [Hem76, Ch. 6], [Jac80, Th. III.10] を参照。

断面曲率が一定で -1 である完備リーマン多様体を双曲多様体という。 具体的には \mathbb{H}^3 の等長変換群の離散部分群 Γ によって \mathbb{H}^3/Γ とかける。 以下、断りのない限り、双曲多様体 M は向き付け可能で体積が有限である物のみを考える。 このとき M は境界がトーラスからなるコンパクトな 3 次元多様体の内部と同相になる。 M は既約でアトロイダルである事は比較的簡単に示される。 実は *Haken* 多様体についてはこの逆が成り立つ。

定理 1.4 (Thurston, [Mor84], [Kap01]). *Atoroidal*, *Haken* 多様体は双曲構造をもつ。(但しトーラスまたはクラインボトル上の I バンドルでないとする。)

例えば S^3 内の結び目がトーラス結び目でもサテライト結び目でもなければ、その補空間は双曲構造を持つ事がこの定理から示される。 そこで “*Haken* でない双曲多様体が存在するか？” が気になる問題である。 このような多様体がたくさんある事も Thurston によって示された。

例 1.5. Figure eight knot の Dehn 手術から得られる多様体は、有限個の例外を除いて Haken 多様体ではない (Thurston) . とくに手術後に双曲多様体になる物はすべて non-Haken である. 多様体が Haken かどうかを判定するアルゴリズムの存在は Jaco-Oertel [JO84] により示されているが、与えられた多様体が Haken 多様体であるかどうかを示すのは難しい. 例えば Seifert-Weber docecahedral 多様体が Haken でないことは Burton-Rubinstein-Tillmann によってつい最近示された [BRT12].

Perelman による幾何化予想の解決により定理 1.4 は Haken 多様体の仮定なしに成り立つ:

定理 1.6 (Perelman). *Atoroidal* で基本群が無限である 3次元既約多様体は双曲構造を持つ.

1.2. ファイバー多様体. S を曲面, $\phi: S \rightarrow S$ を diffeo とする. このとき写像トーラス (mapping torus) を次で定義する:

$$M_\phi = S \times [0, 1] / ((x, 0) \sim (\phi(x), 1))$$

M_ϕ の位相は ϕ のアイソトピー類のみによる. 定義から S をファイバーに持つファイブレーション $M_\phi \rightarrow S^1$ が自然に定まる. 逆にファイブレーション $M \rightarrow S^1$ が存在する時, S をファイバーとすれば, S のある diffeo ϕ が存在して $M = M_\phi$ となる事がわかる.

写像トーラス M_ϕ のファイバー曲面は圧縮不可能である事がわかる. よって M_ϕ は Haken 多様体である. これは $M_\phi \rightarrow S^1$ から全射 $H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ が誘導されるので $b_1(M) > 0$ となる事からも従う:

$$(1.1) \quad \boxed{M \text{ は fibered}} \implies \boxed{b_1(M) > 0} \implies \boxed{M \text{ は Haken}}$$

S のオイラー数が負である場合には, S の写像類は 3種類に分けられる事が知られている. それぞれ, periodic, reducible, pseudo-Anosov と呼ばれている. 次の定理が有名である.

定理 1.7 (Thurston). ϕ が *pseudo-Anosov* であることと, M_ϕ が双曲構造を持つことは同値.

Thurston は論文 [Thu82] の p.375 で定理 1.4 に関して次のような回想をしている: “I immediately came up with this class of 3-manifolds (ファイバー多様体) as ”obvious” counterexamples (定理 1.4 への)”. しかしながら Virtual Fibering 予想は有限被覆をとればすべてこのような双曲多様体になる事を主張している.

1.3. 予想の説明. まず Thurston の論文 [Thu82] から関連する予想の内容をそのまま引用する:

15. Can finitely-generated subgroups of a finitely-generated Kleinian group be residually separated from the group?
16. Does every aspherical 3-manifold, or every hyperbolic 3-manifold, have a finite-sheeted cover which is Haken?
17. Does every aspherical 3-manifold have a finite-sheeted cover with positive first Betti number?
18. Does every hyperbolic 3-manifold have a finite-sheeted cover which fibers over the circle?

18. に続けて, “This dubious-sounding question seems to have a definite chance for a positive answer” と書かれている事を注記しておく. 双曲多様体の場合に特化して簡潔に述べると,

15. 有限生成クライン群は LERF (後述) か?
16. 双曲 3次元多様体は Haken 多様体である有限被覆を持つ (virtually Haken) か?
17. 双曲 3次元多様体は $b_1 > 0$ である有限被覆を持つ (virtually positive betti number) か?
18. 双曲 3次元多様体は S^1 上の曲面束になる有限被覆を持つ (virtually fibered) か?

となる. LERF については後の節で説明するのでここでは触れないことにする. 命題 1.3 により境界つきの場合には (16), (17) は自明で (18) のみが問題になる. また閉多様体の場合にも (1.1) から予想 (18) が解ければ (16) と (17) が従う事がわかる. よって予想 (18) が解ければすべて解けたことになる. 実際この予想 (18) は解決された.

定理 1.1 (Agol, Wise) M を有限体積 3次元双曲多様体とする. このとき M の有限被覆 $M' \rightarrow M$ で M' が S^1 上の曲面束となる物が存在する.

状況が込み入っているが大雑把に言うと, 境界つきの場合には Wise, 閉多様体の場合には Agol によって解決されたので Agol-Wise の定理と書いた.

次の節で閉多様体の場合の証明の概略を述べる前に, 関連して解決した問題について述べておく. 多様体 M が $b_1 > 0$ となる有限被覆を持つ時, 単に $vb_1(M) > 0$ と書く事にする. 任意の自然数に対して, それより b_1 が大きくなる有限被覆をとれる時 $vb_1(M) = \infty$ と書く事にする. 群 G が有限指数部分群 $H < G$ で, H から階数 2 の自由群への全射があるとき G は large であるという. これらは次のような関係になっている:

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \boxed{\pi_1(M) \text{ は large}} & & \boxed{M \text{ は virtually fibered}} & & & & \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & & & \\ \boxed{vb_1(M) = \infty} & \xrightarrow{(3)} & \boxed{vb_1(M) > 0} & \xrightarrow{(4)} & \boxed{M \text{ は virtually Haken}} & \xrightarrow{(5)} & \boxed{\pi_1(M) > \pi_1(S) \quad (S \text{ は 種数 2 以上の閉曲面})} \end{array}$$

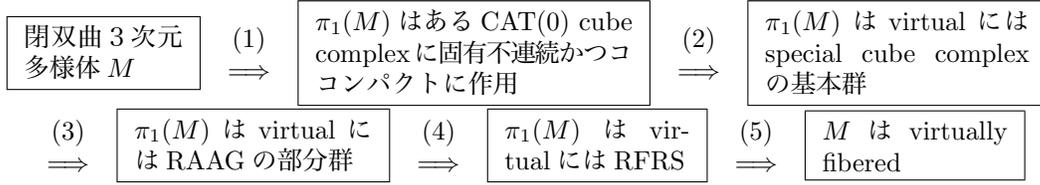
ここで (3) と (5) は定義より明らか、(2) と (4) は (1.1) で説明した通りである。 $\pi_1(M)$ が large なら有限指数部分群 $H < \pi_1(M)$ で $H \twoheadrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ が存在する。 H に対応した有限被覆 $M' \rightarrow M$ をとれば、アーベル化を考える事で $H_1(M'; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^2$ が得られる。 よって $b_1(M') \geq 2$ 。 階数 2 の自由群の中には任意の階数の自由群を有限指数部分群として含むので、 $vb_1(M) = \infty$ も同様に示される。 これらはすべて示された事となった。

定理 1.8 (Agol, Thm 9.2 [AGM12]). M を閉双曲 3 次元多様体とする。 $\pi_1(M)$ は LERF で large。 また M の有限被覆 M' で S^1 上の曲面束になる物が存在する。

予想の関係は (1.2) に示された通りだが、解決の順は大分異なる。 (1.2) の中で一番最初に解決したのが“閉双曲 3 次元多様体の基本群 $\pi_1(M)$ は閉曲面群 $\pi_1(S)$ を含む”という Kahn-Markovich の定理 (surface subgroup 予想の解決) であり、この結果に基づいて定理 1.8 が証明されている。

$\pi_1(M)$ が large であることについてこのノートではこれ以上述べないが (余裕があれば加筆予定)、[AFW12] の §4 (C12) に解説がある。

1.4. 証明の流れ。ここでは閉多様体の場合について定理 1.1 (定理 1.8) の解決の流れを述べる。カスプがある場合については後の節で述べる予定である。図式にすると次のとおりである：



例えば、“virtual には special cube complex の基本群”とは有限指数部分群で special cube complex の基本群となる物が存在する事を意味する。これらは次のように証明されていった：

- (1) $\pi_1(M)$ はある CAT(0) cube complex に固有不連続かつコンパクトに作用する。(Bergeron-Wise [BW09], Sageev [Sag95], [Sag97], Kahn-Markovic [KM12] の結果に基づく。)
- (2) CAT(0) cube complex に固有不連続かつコンパクトに作用する群は compact special cube complex の基本群を有限指数部分群として含む。(Agol [AGM12])
- (3) special cube complex の基本群は right angled Artin 群 (RAAG) の部分群。(Haglund-Wise [HW08])
- (4) 群 G が RAAG なら G は virtually residually finite rationally solvable (virtually RFRS)。(Agol [Ago08])
- (5) $\pi_1(M)$ が RFRS なら M は virtually fibered (Agol [Ago08])。

このノートでは RFRS, RAAG, CAT(0) cube complex, special cube complex などの概念を説明し、上記の結果の一部には証明を与えていく。

2. RFRS

2.1. **Residually finite.** G を群とする。 G の部分群 H を $G > H$, 正規部分群 N を $G \triangleright N$ と書くことにする。

定義 2.1. 群 G が次の同値な条件を満たす時 residually finite であるという。

- (1) 任意の $g \in G$ ($g \neq 1$) に対して、 $\phi(g) \neq 1$ となる有限群 F と準同型 $\phi : G \rightarrow F$ が存在する。

$$(2) \bigcap_{\phi: G \rightarrow F : F \text{ is finite}} \text{Ker}(\phi) = \{1\}$$

$$(3) \bigcap_{H < G : \text{finite index}} H = \{1\}.$$

$$(4) \bigcap_{H < G : \text{finite index}} H = \{1\}.$$

(1), (2), (3) が同値である事は明らかである。また (3) \implies (4) も明らかである。(4) \implies (3) は次のように示せる。 G の有限指数部分群 H に対し

$$(2.1) \quad \text{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

と定義する。定義から $\text{Core}(H) < G$ となる。 H に関する剰余分解 $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_kH$ を一つ固定すると

$$\text{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \bigcap_{g_1, \dots, g_k} g_i H g_i^{-1}$$

と書ける。次の補題の (2) により $\text{Core}(H)$ は G の中で有限指数となる。よって $\bigcap_{H < G : \text{finite index}} H = \{1\}$ なら

$$\bigcap_{H' < G : \text{finite index}} H' = \bigcap_{H < G : \text{finite index}} \text{Core}(H) \subset \bigcap_{H < G : \text{finite index}} H = \{1\}.$$

補題 2.2. 群 G に対して以下が成り立つ:

- (1) F を G の有限指数部分群とする. G の部分群 H に対し $H \cap F$ は H の有限指数部分群で $[H : H \cap F] \leq [G : F]$ を満たす.
- (2) H_1, \dots, H_k を G の有限指数部分群とする. このとき $H_1 \cap \dots \cap H_k$ も G の有限指数部分群となる.

Proof. (1) G を $G = g_1 F \sqcup g_2 F \sqcup \dots \sqcup g_k F$ と剰余分解する ($k = [G : F]$). もし $g_i F \cap H \neq \emptyset$ なら代表元 g_i を $g_i \in H$ となるように取り直す. このとき

$$H = G \cap H = (g_1 F \cap H) \sqcup \dots \sqcup (g_k F \cap H) = g_{i_1}(F \cap H) \sqcup \dots \sqcup g_{i_l}(F \cap H)$$

(ここで $\{i_1, \dots, i_l\} \subset \{1, \dots, k\}$) となり, $[H : H \cap F] = l \leq k = [G : F]$ となる.

(2) $k = 2$ のときのみ示せば良い. このとき $G > H_1 > H_1 \cap H_2$ に (1) を適用すれば明らか. \square

補題 2.3. G を加算群とする. このとき以下は同値:

- (1) G は *residually finite*.
- (2) 部分群の列 $G > G_1 > G_2 > \dots$ で $[G : G_i] < \infty$ かつ $\bigcap_i G_i = \{1\}$ となる物が存在する.

Proof. (2) \Rightarrow (1) は明らか. (1) \Rightarrow (2) を示す. 各 $g \in G$ に対してある有限指数部分群 $H_g < G$ で $g \notin H_g$ となるものをとれば $\bigcap_{g \in G} H_g = \{1\}$ となる. G は加算だから $\{H_g\}_{g \in G}$ を $\{H_i\}_{i=1}^\infty$ と書き表せる. $G_i = H_1 \cap \dots \cap H_i$ とすれば $G > G_1 > G_2 > \dots$ で $[G : G_i] < \infty$ かつ $\bigcap_{i=1}^\infty G_i = \{1\}$ となる. \square

補題 2.3 の (2) の部分群の列として $G \triangleright G_i$ を仮定しても同値な条件である. 実際 $G > G_1 > G_2 > \dots$ に対して $G > \text{Core}(G_1) > \text{Core}(G_2) > \dots$ を与えればよい.

2.2. **RFRS.** G を群とする. $a, b \in G$ に対し交換子を $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ で定義する. 交換子群 $[G, G]$ を G の交換子で生成される G の部分群と定義する. $a, b, g \in G$ に対し $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$ より $[G, G]$ は G の正規部分群であり, $G/[G, G]$ はアーベル群になる. さらにアーベル群 A と準同型 $G \rightarrow A$ があるとき, 次の図式を可換にする準同型 $G/[G, G] \rightarrow A$ が唯一存在することが分かる.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & A \\ & \searrow & \uparrow \exists! \\ & & G/[G, G] \end{array}$$

群のホモロジーの記号に従い $H_1(G; \mathbb{Z}) = G/[G, G]$ と書くことにする.

群 G に対し部分群 $G^{(n)}$ を次のように定義する.

$$G^{(1)} = [G, G], \quad G^{(n+1)} = (G^{(n)})^{(1)}$$

さらに

$$G_r^{(1)} = \{g \in G \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } g^k \in [G, G]\}, \quad G_r^{(n+1)} = (G_r^{(n)})^{(1)}$$

と定義する. $G_r^{(1)}$ は G の正規部分群である. 実際 $G_r^{(1)}$ は次のように記述できる事がわかる.

補題 2.4.

$$G_r^{(1)} = \text{Ker}(G \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z})/\text{Tor}).$$

ここで Tor は $H_1(G; \mathbb{Z})$ の有限位数の元のなす部分群. よって次の同型が得られる.

$$(2.2) \quad G/G_r^{(1)} \cong H_1(G; \mathbb{Z})/\text{Tor}$$

Proof. $\pi : G \rightarrow G/[G, G]$ を自然な全射とする. $g \in \text{Ker}(G \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z})/\text{Tor})$ とすると, ある k が存在して $\pi(g)^k = 1$ が成り立つ. すなわち $g^k \in [G, G]$ となる. 逆に $g \in G$ が $g^k \in [G, G]$ となるなら $\pi(g)^k = \pi(g^k) = 1$ より $g \in H_1(G; \mathbb{Z})/\text{Tor}$. \square

$G_r^{(1)}$ は次のようにも書ける:

$$G_r^{(1)} = \text{Ker}(G \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z})/\text{Tor}) = \text{Ker}(G \rightarrow H_1(G; \mathbb{Q})) = \text{Ker}(G \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G/[G, G]).$$

補題 2.5. 群 G と部分群 H に対して次が成り立つ:

- (1) $G > H \implies G_r^{(1)} > H_r^{(1)}$,
 - (2) $G > H \implies G_r^{(n)} > H_r^{(n)}$,
 - (3) $G > H_1, H_2 \implies (H_1)_r^{(1)} \cap (H_2)_r^{(1)} > (H_1 \cap H_2)_r^{(1)}$
 - (4) $G > H, g \in G \implies g(H_r^{(1)})g^{-1} = (gHg^{-1})_r^{(1)}$. とくに $G \triangleright G_r^{(n)}$ が成り立つ.
- ()_r⁽ⁿ⁾ を ()⁽ⁿ⁾ で置き換えても同様の結果が成り立つ.

Proof. (1) は明らか. (2) と (3) は (1) から従う. (4) は $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$ から従う. \square

定義 2.6. 群 G に対し次の条件を満たす部分群の列 $G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots$ が存在する時, G を *residually finite rationally solvable (RFRS)* と言う.

- (1) $G \triangleright G_i$
- (2) $\bigcap_i G_i = \{1\}$
- (3) $[G : G_i] < \infty$
- (4) $G_{i+1} > (G_i)_r^{(1)}$

注 2.7. \bullet とくに定義 2.6(1) から $G_i \triangleright G_{i+1}$ が成り立ち, 商群 G_i/G_{i+1} が定義できる.

- \bullet $G_1 > G_r^{(1)}$ より $G_2 > (G_1)_r^{(1)} > (G_r^{(1)})_r^{(1)} = G_r^{(2)}$. また $G_r^{(2)} = (G_r^{(1)})_r^{(1)} > (G_r^{(1)})^{(1)} > G^{(2)}$ となる. 同様に $G_n > G_r^{(n)} > G^{(n)}$ が成立する.
- \bullet $G_n > G_r^{(n)} > G^{(n)}$ より

$$G/G^{(n)} \twoheadrightarrow G/G_r^{(n)} \twoheadrightarrow G/G_n$$

が成り立ち, $G/G^{(n)}$ は n 回の交換子部分群が $\{1\}$ になるので可解だから, $G/G_r^{(n)}$ と G/G_n も可解となる.

RFRS の条件 (4) $G_{i+1} > (G_i)_r^{(1)}$ から次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G_{i+1} & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow & G_i/G_{i+1} \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & \nearrow & \\ & & & & H_1(G_i; \mathbb{Z})/\text{Tor} \cong G_i/(G_i)_r^{(1)} & & \end{array}$$

ここで横の列は完全列である. 逆に上の三角形の部分可換にする準同型 $H_1(G_i; \mathbb{Z})/\text{Tor} \rightarrow G_i/G_{i+1}$ が存在すれば $G_{i+1} > (G_i)_r^{(1)}$ となる. すなわち (4) の条件は,

$$(4') \text{ 自然な射影 } G_i \rightarrow G_i/G_{i+1} \text{ は } H_1(G_i; \mathbb{Z})/\text{Tor} \text{ を経由する,}$$

と言い換える事ができる.

補題 2.8. 定義 2.6 のうち (2), (3), (4) を満たせば G は RFRS.

Proof. $G > G_1 > G_2 > \dots$ を (2), (3), (4) を満たす部分群の列とする. $\text{Core}(G_i)$ を (2.1) で定義すると $\text{Core}(G_i)$ は G の正規部分群で有限指数となる.

$$\text{Core}(G_{i+1}) = \bigcap_{g \in G} gG_{i+1}g^{-1} > \bigcap_{g \in G} g(G_i)_r^{(1)}g^{-1} = \bigcap_{g \in G} (gG_i g^{-1})_r^{(1)} > \left(\bigcap_{g \in G} gG_i g^{-1} \right)_r^{(1)} = \text{Core}(G_i)_r^{(1)}$$

等号と不等号はそれぞれ左から順に, Core の定義, RFRS の定義 (4), 補題 2.5(4), 補題 2.5(3), Core の定義, から従う. よって $G > \text{Core}(G_1) > \text{Core}(G_2) > \dots$ は RFRS の条件を満たす. \square

補題 2.9. G が RFRS なら部分群 $H < G$ も RFRS.

Proof. $G > G_1 > \dots$ を RFRS の条件を満たす部分群の列とする. $H_i = H \cap G_i$ と置くと $H > H_1 > H_2 > \dots$ は RFRS の条件を満たす. 実際 $G \triangleright G_i$ より $H \triangleright H_i$ で $\cap H_i < \cap G_i = \{1\}$. 補題 2.2(1) より $[H : H_i] < \infty$. 補題 2.5(3) より $H_{i+1} = H \cap G_{i+1} > H \cap (G_i)_r^{(1)} > (H \cap G_i)_r^{(1)} = (H_i)_r^{(1)}$. \square

注 2.10. G を群, $H < G$ を有限指数部分群とする. $H > H_1 > H_2 > \dots$ が RFRS であるとする. このとき $G > H_1 > H_2 > \dots$ を考えると $\cap_i H_i = \{1\}$, $[G : H_i] < \infty$, $H_{i+1} > (H_i)_r^{(1)}$ なので補題 2.8 より G は RFRS になりそうに見える. しかしながら $H < G_r^{(1)}$ が一般には成り立たないので, この部分群の列は RFRS の公理を満たしていない.

G が $H_1(G; \mathbb{Q}) = 0$ を満たす時, RFRS の公理をみたす列 $G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots$ がとれたとする. $H_1(G; \mathbb{Z})/\text{Tor} = 0$ より $G_0/G_1 = \{1\}$ だから $G_0 = G_1$ となる. 同様にして $G = G_0 = G_1 = \dots$ となるのでこれは RFRS の公理を満たしていない. よって $H_1(G; \mathbb{Q}) = 0$ なら G は RFRS ではない. 例えば G を right angled Coxeter group (§3) とすると $H_1(G; \mathbb{Q}) = 0$ だが G は RFRS となる有限指数部分群を含む (定理 4.1). よって virtually RFRS だが RFRS とは限らない例が存在する.

M を多様体とする. (以下の議論では被覆空間の存在のみしか使わない.) $G = \pi_1(M)$ の場合に RFRS の条件を幾何学的に考えてみる. $G > G_1 > G_2 > \dots$ を RFRS の定義に出てくる部分群の列とする. G_i に対応した有限被覆を $M_i \rightarrow M$ とする. このとき RFRS の定義は次のように言い換える事ができる.

定義 2.11. M は多様体で, $\pi_1(M)$ は有限生成とする. 次の性質を満たす被覆の列 $\dots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M$ がとれる時, $G = \pi_1(M)$ は RFRS であると言う:

- (1) $M_i \rightarrow M$ は regular covering.
- (2) $\dots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M$ の (射影的) 極限は M の普遍被覆.

- (3) $M_i \rightarrow M$ は有限被覆。
(4) 自然な全射 $\pi_1(M_i) \rightarrow \pi_1(M_i)/\pi_1(M_{i+1})$ は $H_1(M_i; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ を経由する。

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(M_{i+1}) & \longrightarrow & \pi_1(M_i) & \longrightarrow & \pi_1(M_i)/\pi_1(M_{i+1}) \longrightarrow 1 \\
& & & & \downarrow & \nearrow & \\
& & & & H_1(M_i; \mathbb{Z})/\text{Tor} & &
\end{array}$$

ここで $\pi_1(M)$ が有限生成であると仮定する (e.g. M がコンパクト)。このとき $\pi_1(M_i)$ も有限生成になる事から (Reidemeister-Schreier method), $H_1(M_i; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ は自由アーベル群 \mathbb{Z}^{r_i} と同型になる。また $\pi_1(M_i)/\pi_1(M_{i+1})$ は有限群である事に注意すると $\pi_1(M_i)/\pi_1(M_{i+1})$ は有限巡回群の積になる。よって $M_{i+1} \rightarrow M_i$ は有限巡回被覆の繰り返しで得られる。(4) の条件から, M の普遍被覆は有限巡回被覆の極限として得られる事がわかる。

3. RAAG

この節では right angled Coxeter 群, right angled Artin 群について解説する。そのまえに §3.1 で一般の Coxeter 群と Artin 群について述べる。

3.1. Coxeter 群と Artin 群. $1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) に対して m_{ij} を $2 \leq m_{ij} \leq \infty$ となる整数で $m_{ij} = m_{ji}$ を満たすものとする。このような $\{m_{ij}\}$ に対し Coxeter 群を

$$\begin{aligned}
C &= \langle g_1, \dots, g_n \mid g_i^2 = 1, \underbrace{g_i g_j g_i \cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{g_j g_i \cdots}_{m_{ij}} \ (i \neq j) \rangle \\
&= \langle g_1, \dots, g_n \mid g_i^2 = 1, (g_i g_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle
\end{aligned}$$

で定義する。但し, $m_{ij} = \infty$ の時は, g_i と g_j の間に関係式はないものとする。2列目の表示から, 便宜上 $m_{ii} = 1$ と定義しておく。また Artin 群を

$$A = \langle g_1, \dots, g_n \mid \underbrace{g_i g_j g_i \cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{g_j g_i \cdots}_{m_{ij}} \ (i \neq j) \rangle$$

で定義する。Coxeter 群 C , Artin 群 A はただ単に群であるだけでなく生成元 g_i が指定されている。以降これらの群は生成元が指定された群と考えることにする。(Coxeter 群の場合には, このような群と生成元の組を Coxeter system と呼ぶことが多い。)

例 3.1.

$$m_{ij} = \begin{cases} 3 & |i-j| = 1 \text{ のとき,} \\ 2 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
C &= \langle g_1, \dots, g_n \mid g_i^2 = 1, g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, g_i g_j = g_j g_i \text{ for } |i-j| > 1 \rangle, \\
A &= \langle g_1, \dots, g_n \mid g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, g_i g_j = g_j g_i \text{ for } |i-j| > 1 \rangle
\end{aligned}$$

となり C は対称群で, A はブレイド群となる。

例 3.2. $C = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = 1, (g_1 g_2)^p = (g_2 g_3)^q = (g_3 g_1)^r = 1 \rangle$ を考える。 $1/p + 1/q + 1/r$ が $> 1, = 0, < 1$ に従ってそれぞれ球面, ユークリッド平面, 双曲平面に角度が $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$ となる測地三角形がとれる。両端が角度がそれぞれ $(\pi/r, \pi/p), (\pi/p, \pi/q), (\pi/q, \pi/r)$ となる辺での折り返しを g_1, g_2, g_3 とする。このとき $g_1 g_2$ は $2\pi/p$ 回転, $g_2 g_3$ は $2\pi/q$ 回転, $g_3 g_1$ は $2\pi/r$ 回転となる。よって C の関係式を満たす事がわかる。さらに Poincaré の多面体定理から, この関係式のみしか出てこない事が分かる。よって C は $1/p + 1/q + 1/r$ が $> 1, = 0, < 1$ に従ってそれぞれ $O(3), O(2) \times \mathbb{R}^2, O(2, 1)$ の離散部分群として実現できる。いずれの場合も $GL(3, \mathbb{R})$ の離散部分群として実現できる。

例 3.2 ではある Coxeter 群を $GL(3, \mathbb{R})$ 離散部分群として実現した。さらに構成法から生成元 g_i は \mathbb{R}^3 の '鏡映' として実現できている事がわかる。

$V = \mathbb{R}^k$ とする。 H を V の $k-1$ 次元部分空間とする。 H に関する鏡映とは V の非自明な線形変換 r で $r|_H = \text{id}$ かつ $r^2 = \text{id}$ となるものである。 r の固有空間を考えると固有値 1 の空間 H と固有値 -1 の 1 次元空間に分解する。固有値 -1 の固有空間の元 $b \neq 0$ を一つ固定する。また V^* の元 α で $\alpha|_H = 0$ かつ $\alpha(b) = 2$ となるものを取る。このとき r は

$$(3.1) \quad r(x) = x - \alpha(x)b$$

と書ける。たとえば V に内積 $(,)$ があるときには b として H に直交するベクトルをとってくると, $\alpha(x) = 2(x, b)/(b, b)$, $r(x) = x - \frac{2(b, x)}{(b, b)}b$ となり普通の意味での鏡映になる。

ここで Coxeter 群 C に対し生成元 g_i が鏡映になるように $GL(k, \mathbb{R})$ の部分群として実現できるかという問題を考える. 例 3.2 の双曲三角形に対応した Coxeter 群の場合を考える. 双曲平面をローレンツ空間 $\mathbb{E}^{2,1}$ の双曲面として実現すると, 三角形の各辺 e はこの双曲面と $\mathbb{E}^{2,1}$ の 2次元部分空間 H_e との交わりとして表す事ができる. 辺 e での折り返しは H_e での鏡映として表されるので, C の生成元 g_i は鏡映として実現できることがわかる.

まず Coxeter 群と関係なく $b_i \in V$ と $\alpha_i \in V^*$ が与えられていると考える ($i = 1, \dots, n$). Γ を $r_i(x) = x - \alpha_i(x)b_i$ が生成する $GL(V)$ の部分群とする. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \alpha_i(b_j)$ を *Cartan* 行列と呼ぶ.

定理 3.3 (Vinberg [Vin71]). *Cartan* 行列 A が次の条件をみたすとする:

(C1) $i \neq j$ に対して $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) で, $a_{ij} = 0$ なら $a_{ji} = 0$,

(C2) $a_{ii} = 2$, $a_{ij}a_{ji} \geq 4$ または $a_{ij}a_{ji} = 4 \cos^2(\pi/m_{ij})$.

このとき凸錐 $K = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0\}$ は次の性質をみたす

- $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ に対して $\gamma \cdot \text{int}(K) \cap \text{int}(K) = \emptyset$,
- $\mathcal{C} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot K$ は V の凸錐で Γ は $\text{int}(\mathcal{C})$ に離散的に作用する,
- Γ の関係式は

$$r_i^2 = 1, \quad (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1,$$

で与えられる. ただし $a_{ij}a_{ji} \geq 4$ のときは関係式はない ($m_{ij} = \infty$ と考える).

Coxeter 群 $C = \langle g_1, \dots, g_n \mid g_i^2 = 1, (g_i g_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$ を固定する. 定理 3.3 によりベクトル空間 V と $b_i \in V$, $\alpha_i \in V^*$ で行列 $(\alpha_i(b_j))$ が条件 (C1), (C2) をみたす物を構成すれば C は $GL(V)$ の離散部分群として構成できたことになる. とくに $V = \mathbb{R}^n$ で e_1, \dots, e_n を V の基底, e_1^*, \dots, e_n^* をその双対基底とすると

$$(3.2) \quad b_i = e_i, \quad \alpha_i = \sum_j -2 \cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) e_j^*$$

と置けば $\alpha_i(b_j) = -2 \cos(\frac{\pi}{m_{ij}})$ は条件 (C1), (C2) をみたす. この場合は Tits により定理 3.3 の凸錐 \mathcal{C} の存在は示されており, \mathcal{C} は *Tits cone* と呼ばれる. 実際には Coxeter 群 C は様々な方法で鏡映群として実現可能である事を注意しておく.

例 3.4. $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を考える. これは

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle r_0, r_1 \mid r_0^2 = r_1^2 = 1 \rangle$$

となる表示をもつので Coxeter 群である. Γ は \mathbb{R} に

$$(3.3) \quad r_0(x) = -x, \quad r_1(x) = 2 - x$$

と Affine 変換で作用する. よって Γ は $GL(2, \mathbb{R})$ に

$$r_0 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で埋め込める. $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \mid y > 0\}$ は \mathbb{R}^2 の凸錐で $\Gamma \cdot (\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq x\} \setminus \{0\}) = \mathbb{H}^2$ となる.

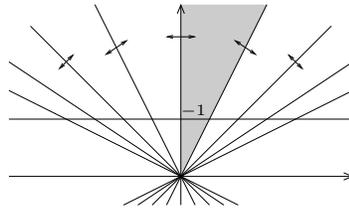


FIGURE 1.

3.2. RAAG. Γ を有限単体的グラフとする. すなわち Γ は頂点集合 $V(\Gamma)$ と辺の集合

$$E(\Gamma) \subset \{\{v, w\} \subset V(\Gamma) \mid v \neq w\}$$

の対 $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ を表すとする. Γ に対して *Right Angled Artin Group* (RAAG) A_Γ を次の表示で定義する:

$$A_\Gamma = \langle g_v, v \in V(\Gamma) \mid [g_v, v_w] = 1 \text{ for } \{v, w\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

また *Right Angled Coxeter Group* を次で定義する:

$$C_\Gamma = \langle g_v, v \in V(\Gamma) \mid g_v^2 = 1, [g_v, v_w] = 1 \text{ for } \{v, w\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

注 3.5. 定義から Artin 群 (Coxeter 群) のうち m_{ij} が 2 か ∞ のものが right angled Artin group (right angled Coxeter group) といえる. Coxeter 群に対して Coxeter diagram というグラフが定義されるが, right angled Coxeter 群を定義するときのグラフ Γ とは異なることを注意しておく.

例 3.6. Γ が n 個の頂点のみからなる場合, A_Γ は階数 n の自由群となる. Γ が完全グラフ (すべての頂点の組が辺で結ばれているグラフ) のとき A_Γ は \mathbb{Z}^n と同型になる (n は Γ の頂点の数). 単体的グラフ Γ_1 と Γ_2 に対して, Γ_1 の頂点をすべての Γ_2 の頂点と結んだグラフを Γ' とすると $A_{\Gamma'} = A_{\Gamma_1} \times A_{\Gamma_2}$ となる.

上の例が示すよう right angled Artin 群は自由群と自由アーベル群の中間的な物といえる. Right angled Artin 群を RAAG と略すのは一般的なようだが, right angled Coxeter 群を RACG と略すのはあまり見かけない. しかしこのノートでは RACG という省略を用いることにする.

定理 3.7 (Davis-Januszkiewicz [DJ00]). Γ を有限単体的グラフとする. A_Γ はある別のグラフからできる RACG の有限指数部分群として実現できる.

例えば $\Gamma = \bullet$ とすると $A_\Gamma \cong \mathbb{Z}$. そこで $\Gamma' = \bullet$ とすると $C_{\Gamma'} \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 = \langle r_0, r_1 \mid r_0^2 = r_1^2 = 1 \rangle$ で $C_{\Gamma'}$ を (3.3) のように \mathbb{R} に作用させると $r_1 r_0 : x \mapsto x + 2$ は平行移動になる. よって生成元を $r_1 r_0$ に移す事で \mathbb{Z} は $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ に指数 2 の部分群として実現できる. 同様に Γ が完全グラフならば $A_\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$ を $(\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2)^n$ に埋め込む事ができる.

一般には以下のように構成する. $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ を与えられた単体的グラフとする. Γ'' を

$$V(\Gamma'') = V(\Gamma) \times \{0, 1\},$$

$$E(\Gamma'') = \{(i, 1), (j, 1)\} \mid \{i, j\} \in E(\Gamma)\} \cup \{(i, 0), (j, 0)\} \mid \forall i, j (i \neq j)\} \cup \{(i, 0), (j, 1)\} \mid \forall i, j (i \neq j)\}$$

で定義する. $(i, 1)$ に対応する生成元を s_i , $(i, 0)$ に対応する生成元を r_i と書く事にする. また A_Γ の生成元を g_i と書くことにする. このとき $\beta : A_\Gamma \rightarrow C_{\Gamma''}$ を

$$\beta(g_i) = r_i s_i$$

で定義すると β は単射で, 像は指数 $2^{|V(\Gamma)|}$ の部分群になる事が示せる [DJ00].

系 3.8. A_Γ は $GL(n, \mathbb{Z})$ の部分群として実現できる.

Proof. 定理 3.7 より A_Γ は C_Γ の部分群となる. 定理 3.3 より C_Γ は生成元を (3.1), (3.2) で定義される鏡映に移す事で $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群として実現できる. とくに今の場合, (3.2) における m_{ij} は $m_{ii} = 1$, $m_{ij} = 2$ (i と j が辺で結ばれている場合), $m_{ij} = \infty$ (i と j が辺で結ばれていない場合) のいずれかだから各生成元は $GL(n, \mathbb{Z})$ の元として実現できる. \square

4. RAAG \implies RFRS

群 G が RACG なら RFRS である事を示す [Ago08, Theorem 2.2]. 定理 3.7 から RAAG も RFRS になる事が分かる.

定理 4.1 (Agol). G が right angled Coxeter 群なら, 有限指数部分群 $G' < G$ で RFRS となるものが存在する.

Proof. G を RACG とする. Coxeter 群としての標準的な生成元は n であるとする. 定理 3.3 より G は実ベクトル空間の凸錐に離散的に作用させることができる. とくに (3.2) と (3.1) で定まるように G を \mathbb{R}^n に作用させるときには, $(n-1)$ 次元単体の錐が基本領域になるように Tits cone $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ に G を作用させる事ができる. これの射影化 $C = P(\mathcal{C})$ を考えると, G は C に $(n-1)$ 次元単体が基本領域になるように作用する事がわかる. 構成から C はこの $(n-1)$ 次元単体を G の作用で展開する事で得られる. G は鏡映で生成されるので $(n-1)$ 次元単体を面に沿って繰り返し折り返す事により C は得られる. よって商 $D = C/G$ は $(n-1)$ 次元単体で, 各面が位数 2 の元の特異集合となる orbifold になる. (G の Coxeter 複体への G の作用を考えてもこのような orbifold は構成できる.)

F_0 を D の $(n-1)$ 次元の面とする. F_0 に対応してある鏡映 r_0 が定まるが, これを用いて $D_1 = D \cup r_0 D$ と定義する. つぎに D_1 の $(n-1)$ 次元の面 F_1 での鏡映 r_1 をとり, $D_2 = D_1 \cup r_1 D_1$ と定める. 同様に D_i の面 F_i と F_i での鏡映 r_i を選ぶ事で, $D_{i+1} = D_i \cup r_i D_i$ で定義する (Figure 2). ここで D_i の極限は C に

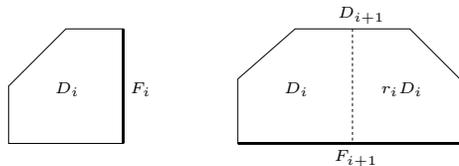


FIGURE 2.

なるように r_i を選んでいくことにする. 実際次のように D_i の面を選んでいけば良い. まず G は加算なので $g_0 = 1, g_1, g_2, \dots$ と番号付けをする. このとき $C = \bigcup_{i=0}^{\infty} g_i D$ となる. ここで g_1 は D の面に関する鏡映の有限個の積で書けるから, それらに関して D_i を定義していけば $g_1 D \subset D_{i_1}$ となるように D_1, D_2, \dots, D_{i_1} をとれる. 同様に $i_2 \geq i_1$ を $g_2 D \subset D_{i_2}$ となるようにとれる. これを繰り返す事で $g_k D \subset D_{i_k}$ となるように D_j を定義していけば, $\bigcup_{i=0}^{\infty} D_i \supset \bigcup_{i=0}^{\infty} g_i D = C$ となる.

Γ_i を D_i の $n-1$ 次元の面に関する鏡映で生成される群とする. 定義から $C/\Gamma_i = D_i$ となり, $D_{i+1} \rightarrow D_i$ は orbifold としての 2 重被覆になっている. また $G > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \dots$ で $\Gamma_i/\Gamma_{i+1} \cong \mathbb{Z}/2$ である. D_i の極限が C になるようにとったので $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_i = \{1\}$ である. よって $G > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \dots$ が RFRS の条件を満たすためには $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i/\Gamma_{i+1}$ が $H_1(\Gamma_i; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ を経由する事を示せば良い. しかしながら Γ_i は RACG なので $H_1(\Gamma_i; \mathbb{Z})$ は自由な元を持たない. そこで Γ_i の有限指数部分群をとる事で RFRS の条件を満たすように工夫する.

G の表示から G の可換化 $G/[G, G]$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と同型になる. G の有限指数部分群 G' を

$$G' = \text{Ker}(G \rightarrow G/[G, G]) = \text{Ker}(G \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)$$

で定義する. $D' \rightarrow D$ を G' に対応した有限被覆とする. G の標準的な生成元を g_i と書く事にする. 各 g_i は \mathbb{R}^n の鏡映として表されていた. G' の元は g_i のワードで書けるが, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ で自明な事から各 g_i は偶数回現れる. よって G' の元は C の向きを保つ. とくに $D' = C/G'$ は向き付け可能である.

G が right angled である事から D の余次元 1 の面 F の C への逆像は C の中に埋め込まれている (互いに交わらない hyperplane の和になる). これを G' の作用で割った物が F の D' への逆像となるので, D' と同様に向き付け可能な多様体になる. $G_i = G' \cap \Gamma_i$ と定義する. $[G_i : \Gamma_{i+1}] \leq [\Gamma_i : \Gamma_{i+1}] = 2$ より G_i/G_{i+1} は $\mathbb{Z}/2$ か自明となる. とくに G_i/G_{i+1} は可換群なので $G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$ は $H_1(G_i; \mathbb{Z})$ を経由する事がわかる. さらに $H_1(G_i; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ を経由することを示すには, $g \in G_i \setminus G_{i+1}$ の元が $H_1(G_i; \mathbb{Z})$ の中で自由な元である事を示せば良い.

まず $h \in \Gamma_i \setminus \Gamma_{i+1}$ の元を特徴づける. $h \in \Gamma_i$ の元は C の中のパスで D_i で始まり hD_i の点で終わるパスに対応する. このパスを D_{i+1} の中に射影する (Figure 3). この射影の終点は D_i か $r_i D_i$ に入るが, D_i に入る時に限り h は Γ_{i+1} の元になる. よって $h \in \Gamma_i \setminus \Gamma_{i+1}$ の元は F_i と奇数回交わる元であると特徴付けられる.

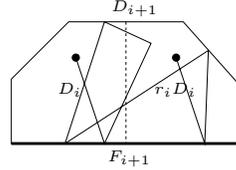


FIGURE 3. Γ_i の元だが Γ_{i+1} の元でないパス. F_i とは奇数回しか交わらない.

$g \in G_i \setminus G_{i+1}$ に対応する $D'_i = C/G_i$ のパスを γ とする. $g \notin G_{i+1} < \Gamma_{i+1}$ より γ の D_i への射影は F_i と奇数回交わる事がわかる. よって γ は D'_i の中で F_i の逆像と奇数回交わる事になる. F_i の D'_i への逆像は向き付けられているから γ との代数的交点数が定義でき, 奇数回交わっているのではこれは 0 ではないことがわかる. よって g は $H_1(G_i; \mathbb{Z})$ の中でトーションではない. \square

5. THURSTON ノルム, ファイバー性, AGOL の定理

この章では Thurston ノルムを定義し, 基本的な性質について述べる. Thurston ノルムに関しては, 原論文 [Thu86] と Kapovich の本 [Kap01] の 2 章が詳しい. その後 Agol の論文 [Ago08] の主定理を述べる.

5.1. **Thurston ノルム.** S を連結, コンパクト, 向き付け可能な曲面とする. $\chi(S)$ を S のオイラー数とする. このとき

$$\chi_-(S) = \max\{-\chi(S), 0\}$$

と定義する. S がコンパクト, 向き付け可能だが非連結な場合には $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$ と連結成分に分解して $\chi_-(S) = \sum_i \chi_-(S_i)$ と定義する. M を向き付け可能 3 次元多様体とする. このとき $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の元 z は M に properly に埋め込まれた曲面 $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ で $z = [S]$ と表す事が出来る. $z \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ に対して,

$$x(z) = \min\{\chi_-(S) \mid (S, \partial S) \subset (M, \partial M), [S] = z\}$$

と定義する.

定理 5.1 (Thurston [Thu86]). コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 M に対し, x は次をみたす:

- (1) $z \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して, $x(mz) = mx(z)$,
- (2) $z_1, z_2 \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ に対して $x(z_1 + z_2) \leq x(z_1) + x(z_2)$,
- (3) x は pseudo-norm $x : H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に拡張する,

- (4) M 内の埋め込まれた曲面 S が非自明なサイクルを表すとき、 S のオイラー数が負になるならば、 x はノルムになる。(たとえば既約でアトロイダルな多様体、とくに双曲多様体の場合.)
- (5) x がノルムになる時、単位球 $B_x = \{z \in H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \mid x(z) \leq 1\}$ は有限個の面からなる多面体で、頂点は有理点になる。

(1) と (2) は後に示す事にする。(3), (4), (5) は次の補題 5.2, 5.3 から従う。

補題 5.2. $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は次をみたすとする:

- (1) $p(mx) = |m|p(x)$ ($x \in \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{Z}$),
 (2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ ($x, y \in \mathbb{Z}^n$),

このとき p は $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に連続に (一意に) 拡張し、ベクトル空間の擬ノルム (pseudo-norm) になる。また $\{v \in \mathbb{R}^n \mid p(v) = 0\}$ は整数点で生成されるベクトル部分空間である。さらに

- (3) $x \in \mathbb{Z}^n$ に対して $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

をみたす時、 p はノルムになる。

Proof. $y \in \mathbb{Q}^n$ の元に対し、ある $m > 0$ で $my \in \mathbb{Z}^n$ となる物をとって $p(y) = p(my)/m$ と定義する。(1) よりこの定義は m の取り方に依らない。以降 p は \mathbb{Q}^n 上で定義されていると仮定する。この拡張も (1), (2), (3) をみたすことがわかる。

(2) から $p(x-y) \geq p(x) - p(y)$ と $p(y-x) \geq p(y) - p(x)$, また (1) から $p(x-y) = p(y-x)$ だから $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$. \mathbb{R}^n の L^2 ノルムを $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ で定義する。任意の $x \in \mathbb{Q}^n$ に対し $p(x) \leq C\|x\|_2$ となる定数 C があれば、 $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \leq C\|x-y\|_2$ より p は Cauchy 列を Cauchy 列に移すので連続に拡張する。 L^2 ノルムに関する正規直交基底 e_1, \dots, e_n をとれば $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ と書け、 $|x_i| \leq \|x\|_2$ である。 $C = \max\{p(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ と置けば $p(x) \leq |x_1|p(e_1) + \dots + |x_n|p(e_n) \leq C\|x\|_2$ となる。

p の \mathbb{R}^n への拡張も (1), (2) をみたす事が分かる。よって $\{v \in \mathbb{R}^n \mid p(v) = 0\}$ はベクトル部分空間になる。この部分空間の基底 f_1, \dots, f_k をとる。このとき $\{v \in \mathbb{R}^n \mid p(v) < 1/2\}$ は $\mathbb{R} \cdot f_i$ を含む開集合。よって各 f_i に対して、 $\{v \in \mathbb{R}^n \mid p(v) < 1/2\}$ の中に $\mathbb{R} \cdot f_i$ にユークリッド距離で十分に近い整数点 $f'_i \neq 0$ が存在する。 $p(f'_i) < 1/2$ より $p(f'_i) = 0$ 。また各 f'_i は $\mathbb{R} \cdot f_i$ に十分に近くとつたので f'_1, \dots, f'_k は一次独立。よって f'_1, \dots, f'_k は $\{v \in \mathbb{R}^n \mid p(v) = 0\}$ の基底となる。

さらに (3) をみたす時、 $p(v) = 0$ となる $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $v \neq 0$ であると仮定する。このとき $\{v \in \mathbb{R}^m \mid p(v) = 0\}$ は非自明で整数点で生成される事から、整数点 $x \neq 0$ で $p(x) = 0$ をみたす物が存在し、(3) に矛盾する。よって $p(v) = 0$ なら $v = 0$ となるので p はノルムである。□

補題 5.3. p は補題 5.2 の条件 (1), (2), (3) をみたすとし、 \mathbb{R}^n のノルムとみなす。このとき単位球 $B_p = \{v \in \mathbb{R}^n \mid p(v) \leq 1\}$ は有限個の面からなる多面体になる。また多面体の頂点は \mathbb{Q}^n の点になる。

Proof. まず一般の有限次元ベクトル空間のノルムに関する性質を準備しておく。 $V = \mathbb{R}^n$ を有限次元ベクトル空間、 q をそのノルムとする。このとき V の双対空間 V^* には作用素ノルム $q^*: V^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が

$$q^*(l) = \sup_{x \in V, p(x)=1} |l(x)| \quad (l \in V^*)$$

で定義される。これが V^* のノルムになる事は簡単に確かめられる。例えば $q = \|\cdot\|_2$ であるとき、 $l = (a_1, \dots, a_n)$ に対して $q^*(l) = \sqrt{\sum_i a_i^2}$ である。 q と q^* には双対性がある。実際、 $q^*(l) = 1$ ならば $q(v) = 1$ となる $v \in V$ に対して $|l(v)| \leq 1$ だから ($x = 0$ の場合は自明なので考えない事すると)

$$(q^*)^*(x) = \sup_{l \in V^*, q^*(l)=1} |l(x)| = q(x) \sup_{l \in V^*, q^*(l)=1} \left| l \left(\frac{x}{q(x)} \right) \right| \leq q(x) \cdot 1$$

また $\{v \in V \mid q(v) \leq 1\}$ は凸集合なので、 $q(y) = 1$ となる $y \in V$ に対し、 $l_y(y) = 1$ かつ $q(v) = 1$ となる $v \in V$ に対して $|l_y(v)| \leq 1$ となる $l_y \in V^*$ が存在する。(直感的には Figure 4 の左図。証明はたとえば [Brø83, Theorem 4.3].) よって

$$(q^*)^*(x) = q(x) \sup_{l \in V^*, q^*(l)=1} \left| l \left(\frac{x}{q(x)} \right) \right| \geq q(x) \left| l_{x/q(x)} \left(\frac{x}{q(x)} \right) \right| = q(x)$$

よって q に関する r -球を $B_q(r) = \{v \in V \mid q(v) \leq r\}$ で定義すると、

$$B_q(r) = \bigcap_{l \in V^*, q^*(l)=1} \{x \mid l(x) \leq r\}$$

が成り立つ。よって $B_q(1)$ は作用素ノルムが 1 である V^* の元から定まる半空間の交わりとして書ける。補題 5.2 から決まるノルムに対しては $B_q(1)$ は有限個の半空間の交わりとして書ける事を示していく。

p は (1), (2), (3) をみたし、 \mathbb{R}^n のノルムへ拡張しているとする。 $r \in \mathbb{N}$ に対して、 $B_p(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) \leq r\}$ と定義する。 $r \in \mathbb{N}$ に対して $C(r)$ を凸包 $\text{hull}(B_p(r) \cap \mathbb{Z}^n)$ とする。ここで $\frac{1}{r} \cdot C(r) = \text{hull}(B_p(1) \cap \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n) \subset B_p(1)$

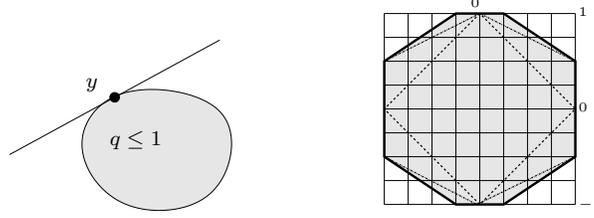


FIGURE 4. 右図は内側から $C(1)$, $\frac{1}{2}C(2)$, $B_p(1) = \frac{1}{4}C(4)$ の境界. $B_p(1)$ は $\frac{1}{2^m}C(2^m)$ で近似できる.

が成り立つ. 自然数 $m < m'$ に対し $\frac{1}{2^m} \cdot C(2^m) \subset \frac{1}{2^{m'}} \cdot C(2^{m'})$ であり, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \cdot C(2^m) \subset B_p(1)$ が成り立つ. また $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (B_p(1) \cap \frac{1}{2^m} \mathbb{Z}^n)$ が $B_p(1)$ で稠密であることから, $B_p(1) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \cdot C(2^m)$ となる (Figure 4 の右図).

z を $\partial B_p(1) \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2^m} \mathbb{Z}^n)$ の点であるとする. このような点は $\partial B_p(1)$ の中で稠密である. このときある $M \in \mathbb{N}$ が存在して $m \geq M$ に対し $2^m z \in \mathbb{Z}^n$ で $p(2^m z) = 2^m$ である. よって $2^m z$ は $C(2^m)$ の $(n-1)$ 次元の面に入るので, ある整数係数の線形関数 $l_{m,z}$ で

- $l_{m,z}(2^m z) = p(2^m z) = 2^m$,
- $v \in C(2^m)$ に対して, $l_{m,z}(v) \leq p(2^m z) = 2^m$,

をみたく物がとれる. よって $l_{m,z}$ は $l_{m,z}(z) = 1$ と, $v \in \frac{1}{2^m} \cdot C(2^m)$ に対して $l_{m,z}(v) \leq 1$ をみたく. $l_{m,z}$ の作用素ノルムは 1 に近づいていくので $m \rightarrow \infty$ のとき $l_{m,z}$ は V^* のコンパクト部分集合に入る. $l_{m,z}$ が整数係数である事から部分列をとれば十分大きい m に対して $l_{m,z}$ は m に依らずに一定にとれる. このような l_z を一つ固定すると

- l_z は整数係数,
- $l_z(z) = 1$,
- $v \in B_p(1)$ に対して, $l_z(v) \leq 1$ (よって $p^*(l_z) = 1$),

をみたく. 各点 z に対してこのような l_z がとれるから, $B_p(1)$ は上の条件を満たす線形関数によって定まる半空間の交わりとして書ける. しかし整数係数で作用素ノルムが 1 である線形関数は有限個しかないので実際には有限個の半空間の交わりになる. よって $B_p(1)$ は多面体になる. さらに l_z が整数係数である事から, 頂点は \mathbb{Q}^n の点になる. \square

M を向き付けられた多様体とする. $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$ である事から, $H^1(M; \mathbb{Z})$ は M から S^1 へのホモトピー類と同一視できる. とくに滑らかな写像 $f: M \rightarrow S^1$ で代表できる. このとき $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ の生成元を微分形式 $d\theta$ で表すと $f^*d\theta$ が対応する $H^1(M; \mathbb{Z})$ の元となる. $s \in S^1$ を f の臨界値ではない点とすると, $f^{-1}(s)$ は M の部分多様体で, f から定まる向きを持つ. この超曲面は f の表すコホモロジー類の Poincaré 双対になる. とくに f が臨界点を持たない場合, すなわち $df \neq 0$ の場合には $f: M \rightarrow S^1$ はファイブレーションになる.

補題 5.4. M をコンパクトで向き付けられた 3 次元多様体とする. ホモロジー類 $z \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ と埋め込まれた曲面 S が $mz = [S]$ をみたしているとする. このとき互いに交わらない埋め込まれた曲面 S_i ($i = 1, \dots, m$) で $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ かつ $[S_i] = z$ となるものがとれる.

Proof. $[S]$ の Poincaré 双対となる関数を $f: M \rightarrow S^1$ とし, $y \in S^1$ を $f^{-1}(y) = S$ となる点とする. z の Poincaré 双対となる関数を $g: M \rightarrow S^1$ とする. このとき次のホモトピー可換な図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & S^1 \\ & \searrow f & \downarrow p(z)=z^m \\ & & S^1 \end{array}$$

上の図式で $p: S^1 \rightarrow S^1$ は被覆写像だから, g をホモトピーで変形する事で実際に可換な図式にできる. よって $p^{-1}(y) = \{y_1, \dots, y_m\}$ とすればこれらは臨界値ではなく, $S_i = g^{-1}(y_i)$ は条件を満たす曲面になる. \square

補題 5.1 の証明. (1) まず $x(mz) \leq mx(z)$ は定義より明らか. mz を表す曲面で χ_- を最小にする埋め込まれた曲面 S をとると, 補題 5.4 より $[S_i] = z$ となるように $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ と分けられるから, $x(mz) = \chi_-(S) = \chi_-(S_1) + \dots + \chi_-(S_m) \geq mx(z)$. よって $x(mz) = mx(z)$ が示された.

(2) $z_1 = [S_1]$, $z_2 = [S_2]$ をそれぞれ χ_- が最小になるように選ぶ. またアイソトピーで動かすことによって, S_1 と S_2 は横断的に交わっているとす. S_1 と S_2 の交わりはアークか円周になるが, 交差のところで $[S'] = [S_1] + [S_2]$ となるようにホモロジー類を変えずにつなぐ事ができる (Figure 5 左図). 構成から $\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$ である. よってオイラー数が正の曲面, すなわち球面か円板が現れなければ $\chi_-(S) = \chi_-(S_1) + \chi_-(S_2)$ より $x(z_1 + z_2) \leq \chi_-(S) = \chi_-(S_1) + \chi_-(S_2) = x(z_1) + x(z_2)$ で証明が終わる. 簡単のため球面が現れてしまう場合

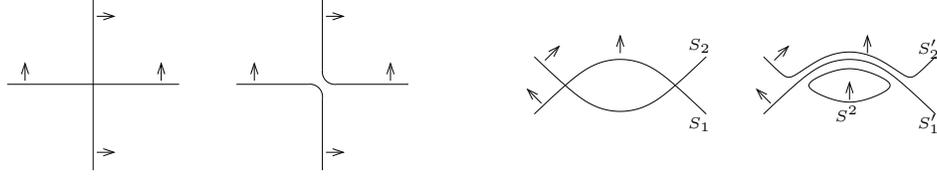


FIGURE 5.

だけ考える. この様な球面は S_1 と S_2 内の円板が境界で貼り合う場合に起こる. これを取り除く事を考える. ここで Figure 5 の右図のように S_1 と S_2 を変形し, 球面 S^2 を一つ加える. (M が既約であれば S^2 は取り除いてしまってもよい.) このとき $[S] = [S'_1] + [S'_2] + [S^2]$ であり $\chi_-(S) = \chi_-(S'_1) + \chi_-(S'_2) + \chi_-(S^2) = \chi_-(S'_1) + \chi_-(S'_2)$ かつ $\chi_-(S_i) = \chi_-(S'_i)$ となるのでこのような円板の組は取り除いてしまってもよい. \square

M を 3 次元多様体とする. $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の Poincaré 双対 $H^1(M; \mathbb{Z})$ の元は M から S^1 へのホモトピー類と同一視できる. とくに滑らかな写像 $f: M \rightarrow S^1$ で代表でき, f の臨界値でない点の逆像が Poincaré 双対で対応する曲面になる. とくに f が臨界点を持たないときには $M \rightarrow S^1$ はファイブレーションになり, $1 \in S^1$ の逆像 $f^{-1}(1)$ がファイバーになる. ファイブレーション $M \rightarrow S^1$ のファイバーに対応するホモロジー類をファイバー類 (fibered class) と呼ぶことにする.

$f: M \rightarrow S^1$ がファイバー類の Poincaré 双対ならば, df がどの点でも 0 でない閉形式である事がわかるが, この逆も言える.

定理 5.5 (Tischler [Tis70]). M を閉多様体とする. ω を M 上の閉 1 形式で, どの点でも 0 でないものとする. さらに ω を $H_1(M; \mathbb{Z})$ の元で積分した元がすべて整数ならば, ある M は S^1 上のファイバー束の構造をもつ. とくに $\dim H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) > 1$ でファイバー構造を 1 つでも持つ場合には, ω を微小に変形する事で M には無限にファイバー構造が入ることが分かる. 境界つきの場合も ω が ∂M 上で *non-vanishing* ならば同様の定理が成り立つ.

Proof. 定理の条件を満たす 1-form ω があれば M のある点 m からのパスに沿って ω を積分すれば M から S^1 への写像 f が構成できる. 作り方から至る所で $df \neq 0$ だから f はファイブレーションを与える. \square

M を $x: H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ がノルムになる 3 次元多様体とする. 定理 5.1 により Thurston ノルムに関する単位球 \mathcal{B}_x は多面体になる. $\partial \mathcal{B}_x$ の各面に $H_2(M, \partial M)$ の凸錐が対応する.

定理 5.6 (Thurston [Thu86]). M を $x: H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ がノルムになる 3 次元多様体とし, \mathcal{B}_x を x の単位球とする. $[S] \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ をファイバー類とする. $[S]$ を含む \mathcal{B}_x の最大次元の面に対応する錐を E と書く事にする. このとき $[S] \in \text{int}(E)$ かつ, すべての E 内の整数点はファイバー類になる. (このような $\partial \mathcal{B}_x$ の面を *fibered face* と呼ぶ.)

ファイバー類の Thurston ノルムは対応するファイバーの χ_- と一致する. より一般に taut foliation のコンパクトリーフは Thurston ノルムを実現する曲面である事が知られている. 以降の議論ではそれほど現れないが重要なのでここで述べておく.

定義 5.7. M をコンパクト 3 次元多様体, $S \subset M$ は向き付けられた曲面とする. S は圧縮不可能で, ホモロジーが自明になる部分集合を含まず, $\chi_-(S) = x([S])$ となる時, S は *taut* であるという.

定義 5.8. 3 次元多様体 M の余次元 1 の transversely oriented foliation は, すべてのリーフに対して横断的に交わる円周がとれる時, taut であるという. とくにファイブレーション $M \rightarrow S^1$ から定まる foliation は taut.

定理 5.9 (Thurston [Thu86]). *Taut foliation* のコンパクトリーフは *taut*. とくにファイブレーション $M \rightarrow S^1$ のファイバー曲面は *taut*.

定理 5.10 (Gabai, [Gab83]). *Taut* な曲面をコンパクトリーフに持つような *transversely oriented* なフォリエーションが構成できる.

5.2. **Agol の定理.** 次の定理が virtual fibering 予想の解決へのきっかけとなった.

定理 5.11 (Theorem 5.1 [Ago08]). M を向き付け可能で既約なコンパクト 3 次元多様体で $\chi(M) = 0$ となる (すなわち境界がないか, トーラスからなる) ものとする. $\pi_1(M)$ が RFRS ならば *non fibered class* $f \in H^1(M; \mathbb{Z})$ に対してある有限被覆 $p_{i,0}: M_i \rightarrow M$ で $p_{i,0}^* f$ がファイバーフェイスの錐の境界にあるように出来る.

記号 $p_{i,0}: M_i \rightarrow M$ は単に証明内のものとあわせるためにそのように書いた. 証明は後の節で与える.

5.3. **Sutured manifolds.** 以降, 埋め込み $Y \subset X$ に対し, その閉近傍を $N(Y)$ とし, $X \setminus Y = \overline{X \setminus N(Y)}$ と書くことにする.

定義 5.12. M をコンパクトで向き付けられた 3 次元多様体とする. $\gamma \subset \partial M$ はアニュラス $A(\gamma)$ とトーラス $T(\gamma)$ からなる集合で各アニュラスにはコアとなる向き付けられた円周 $s(\gamma) \subset A(\gamma)$ が指定されているとする. さらに $\partial M \setminus A(\gamma)$ は 2 つの向き付けられた曲面 $R_+(\gamma) \sqcup R_-(\gamma)$ に分かれていて, 境界での向きが $s(\gamma)$ と同調している時 (M, γ) を *sutured manifold* と呼ぶ. (Figure 6. $s(\gamma)$ は suture (縫い目) と呼ばれる.)

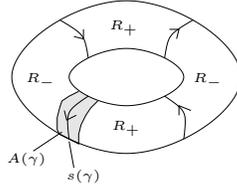


FIGURE 6. Sutured manifold の例. 図は M がソリッドトーラスの場合 ($A(\gamma)$ を一部省略).

S を曲面とすれば $M = S \times I$ は $A(\gamma) = \partial S \times I$, $R(\gamma) = S \times \{0\} \cup S \times \{1\}$ とする sutured manifold になる. これを *product sutured manifold* と呼ぶ. とくに曲面 S が円板 D である時, $M = D \times I$ を sutured ball と呼ぶ.

Gabai によって Thurston ノルム x は次のように一般化されている. $K \subset \partial M$ を部分曲面とする. このとき $H_2(M, K; \mathbb{Z})$ の元 z は M に properly に埋め込まれた曲面 $(S, \partial S) \subset (M, K)$ で $z = [S]$ と表す事が出来る. $z \in H_2(M, K; \mathbb{Z})$ に対して,

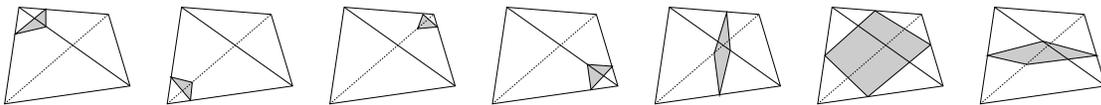
$$x(z) = \min\{\chi_-(S) \mid (S, \partial S) \subset (M, K), [S] = z\}$$

と定義する.

M が既約で $R(\gamma)$ が $H_2(M, \gamma)$ の中で Thurston ノルムと一致する曲面で, incompressible であるとき, (M, γ) を *taut sutured manifold* と呼ぶ. とくに $(S \times I, \partial S \times I)$ は taut である. Sutured manifold (M, γ) 内の foliation に対しても taut の概念が定義できる. Gabai の定理 5.10 に現れる foliation は, 多様体を taut surface で切り開いていくことによってより簡単な taut sutured manifold に分解して行く事で構成される.

6. NORMAL SURFACES

M をコンパクトな 3 次元多様体とする. T を M の三角形分割とする. T の四面体の数を t で表す事にする. M に proper に埋め込まれた (向き付け可能とは限らない) 曲面 S が *normal surface* であるとは S と T の各四面体との交わりが次の 7 つのタイプのディスクに平行な物のみからなる事をいう.



このような disk を normal disk と呼ぶ. 各四面体の中のそれぞれのタイプの normal disk の数を x_i で表せば, normal surface は $7t$ 個の非負整数 $(x_1, x_2, \dots, x_{7t})$ で記述できる. 逆にこのよう非負整数の組から normal surface を構成する事ができるが, 次の 2 つの条件を満たす必要がある. まず上記の normal disk のうち最後の 3 つは同時に現れる事はない. よってそれらに対応する座標は, どれか一つが 0 でなければ他は 0 でなければならない. これらの互いに同時に現れない disk は四面体の 4 辺と交わる事から四角形と呼ぶことにする. 次にそれぞれの四面体の中の normal disk が T 内でうまくつながる条件を考えなければならない. 2 つの四面体が面が隣り合うある 3 角形を考える (Figure 7). 各四面体内の normal disk とこの 3 角形との交わりは 3 角形の

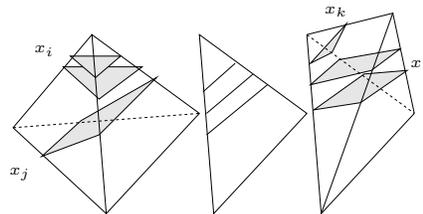


FIGURE 7. 各面で $x_i + x_j = x_k + x_l$ をみたしていれば, normal disk から曲面を再構成できる.

2 つの辺を結ぶアークになる. この 3 角形でそれぞれの normal disk がつながりあうためには Figure 7 にあるように, 関係式 $x_i + x_j = x_k + x_l$ を満たさなければならない. このような 2 つの四面体が隣り合う 3 角形ごと

に3つのタイプのアークに対応して、3つの関係式が出てくる。これらの関係式の解の空間で $x_i \geq 0$ となる物を $S_T \subset \mathbb{R}^{7t}$ と書くことにする。これは \mathbb{R}^{7t} 内の凸錐になる。 S_T のうち、4角形が同時に現れないという条件をみたす物を admissible solution という。 Admissible solution の集合は \mathbb{R}^{7t} 内の凸集合にはならないが、凸錐の和集合にはなる。 Admissible solution の整数点が normal surface の空間と完全に一致する事がわかる。

S_T の元の定数倍は単に normal disk を平行に並べていった物と見なせるので、 S_T の射影化を考えるのが自然である。そこで \mathcal{P}_T を S_T のなかで $\sum_{i=1}^{7t} x_i = 1$ をみたす集合とする。 \mathcal{P}_T は S_T の射影化と思える。 \mathcal{P}_T の元に対しても admissible solution が定義できて、それらの集合は多面体の和集合とみなせる。

Normal surface F に対して、 F (の射影化) を含む最小の面 $C_F \subset \mathcal{P}_T$ が一意に定まる。 C_F は admissible solution からなる事がわかる。 Normal surface G の射影化が C_F に入る時、 G は C_F に運ばれるという。 C_F に運ばれる2つの normal surface G, H は、 T の各四面体の中で同じ四角形のタイプをもつので $G+H$ が定義できる。これは G と H から定まる normal disk をそれぞれ平行に並べて構成した normal surface である。構成から $G+H$ も C_F に運ばれる。

Normal surface F に対し、 $F \cap T^{(1)}$ の数を $\text{wt}(F)$ と書く事にする。 F と同じ M 内のアイソトピー類の normal surface はたくさんあるが、 $\text{wt}(F)$ を最小にする物を考えるのが便利になる事がわかる。

3次元多様体 M 内の曲面で局所的に Figure 8 の左図の様な特異集合を持つ物を branched surface という。特異集合を除いた曲面の各成分に weight をあたえ、それが特異集合のところで Figure 8 の右図にあるように

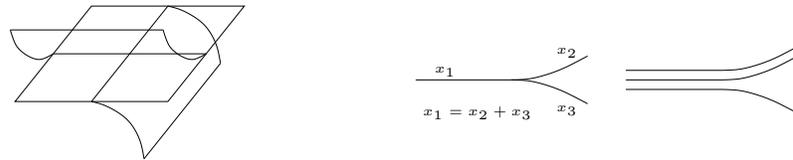


FIGURE 8. 左図は branched surface の特異集合の局所的な図。右図のように branched surface に特異集合で和が適合するように weight をのせると、埋め込まれた曲面が構成できる。

$x_1 = x_2 + x_3$ の関係式をみたすと、それらを特異集合に沿って張り合わせる事で埋め込まれた曲面が出来る。このように構成された M 内曲面は、その branched surface に運ばれるという。状況が normal surface の S_T の admissible solution と似ているが、実際次のように対応する。 Figure 9 にあるように、 T 内の normal surface F から各 normal disk のタイプを同一視し、他のタイプの normal disk とうまく張り合わせる事で、 branched surface を構成する事ができる。この branched surface を \overline{B}_F と書く事にする。構成法から \mathcal{P}_T の面 C_F に運

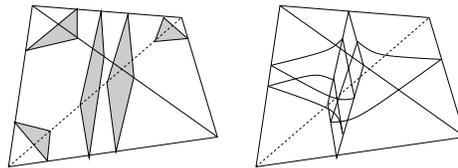


FIGURE 9. 左図から右図のように変形する事で、 normal surface から自然に branched surface が構成できる。また各 normal disk の枚数から自然に weight が定まる。

ばれる normal surface は \overline{B}_F に運ばれる事がわかる。また C_F の座標から、 \overline{B}_F の weight が自然に定まる事もわかる。ここで B_F ではなく \overline{B}_F と書いたのは、後で \overline{B}_F から余計な部分を取り除いてより良い性質を持つ branched surface B_F を構成するためである。

F を M 内の taut surface とする。すなわち Thurston ノルムを実現する圧縮不可能な曲面でホモロジカルに自明になる部分を含まない物とする。ホモロジー類 $[F]$ を表す taut surface の中で wt が最も小さくなる物を $lw\text{-taut}$ (least weight taut) と呼ぶ。ここで圧縮不可能曲面は必ず T の normal surface にアイソトピックである事を注意しておく。定理 5.1 の (1) より F が $lw\text{-taut}$ なら nF も $lw\text{-taut}$ になる。

定理 6.1 (Tollefson-Wang, Thm 3.7 [TW96]). $f \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ に対して、次の性質をみたす \mathcal{P}_T 内の面 C_f が存在する。 $[C_f] \subset H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ を C_f に運ばれる向き付けられた曲面のなすホモロジー類全体とする。このとき C_f は $[C_f]$ の元を代表するすべての $lw\text{-taut surface}$ を運ぶ。この C_f を complete $lw\text{-taut face}$ と呼ぶ

C_f は次のように構成される。 F を normal surface とする。 \mathcal{P}_T の面 C_F に運ばれるすべての normal surface が $lw\text{-taut}$ であるとき C_F は $lw\text{-taut}$ であるという。まず F が $lw\text{-taut surface}$ なら C_F が $lw\text{-taut}$ である事が示される [TW96, Thm 3.3]. $f \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ に対して、 f を代表する向き付けられた $lw\text{-taut normal surface}$ $\{F_1, \dots, F_n\}$ が有限個だけ存在する。このとき $F = F_1 + \dots + F_n$ はホモロジー類 nf を表す $lw\text{-taut surface}$ になる。この F を用いて $C_f = C_F$ と定義すると C_f は定理の性質をみたす事がわかる。この normal surface F を用いて $\overline{B}_f = \overline{B}_F$ と定義する。 F を f から決まる canonical $lw\text{-taut surface}$ と呼ぶ。定理 6.1 の性質から $g \in [C_f]$ ならば $C_g \subset C_f$ であり、 $[C_g] \subset [C_f]$ である。

F を lw-taut な向き付けられた normal surface とする. \overline{B}_F から穴が 0 個以上の穴あきディスクを取り除く事で Reebless incompressible branched surface (RIB) B_F が構成できる.

定義 6.2 (Oertel [Oer84]). 3次元多様体 M 内の branched surface B が次の条件を満たす時, *Reebless incompressible surface (RIB)* と呼ぶ.

- (i) B は contact disk を持たない.
- (ii) $\partial_h N(B)$ は $M \setminus N(B)$ の中で incompressible かつ ∂ -incompressible.
- (iii) $M \setminus N(B)$ は monogon を含まない.
- (iv) B は Reeb component を含まない.

定義に出てくる用語の説明はここでは省略する.

定理 6.3 (Oertel [Oer84]). RIB に運ばれる曲面ですべての *weight* が正の物は, π_1 -injective な曲面である. また M 内には有限個の RIB が存在して, すべての向き付け可能な圧縮不可能曲面はそれらのうちの一つに運ばれる.

さらに taut surface を運ぶよい branched surface も定義される. これは Tollefson-Wang の仕事と関わるのでここでまとめておく.

定義 6.4 (Oertel [Oer86]). 3次元多様体 M 内の branched surface B が向き付けられているとは Figure 10 の中図のように, 特異集合の補集合の各成分に特異集合のところで整合するような向きが入っている場合をいう. 向き付けられた branched surface の closed transversal とは M 内の向き付けられた単純閉曲線で B と向きがあうように横断的に交わる物である. B の特異集合の補集合の各点に対し, その点を通る closed transversal が存在するとき, B を *homology branched surface* であるという. B が homology branched surface で RIB であるとき, B は *homology RIB* であるという. 向き付けられた branched surface B が Thurston ノルムを最小にする曲面しか運ばない時, B を *taut oriented branched surface* と呼ぶ. B が taut oriented で homology RIB であるとき B を *taut homology RIB* と呼ぶ.

定義から taut homology RIB に運ばれる曲面は taut である.

定理 6.5 (Oertel [Oer86]). B は homology RIB であるとする. B に運ばれる曲面には自然に向きが入り, それらは *incompressible* で $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の非自明な元を与える.

M 内には有限個の *taut homology RIB* が存在して, 任意の $H_2(M, \partial M, \mathbb{Z})$ の元はそれらのどれかに運ばれる曲面で実現される.

$f \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ に対し f から決まる canonical lw-taut surface を F とする. $\overline{B}_F = \overline{B}_F$ から穴あきディスクを取り除く事で Reebless incompressible branched surface (RIB) B_F が構成できることを述べた. C_f に運ばれる曲面は構成法から \overline{B}_F に運ばれるが B_f にも運ばれる事がわかる [TW96, Lem 6.1].

B を branched surface とする. B の近傍 $N(B)$ には Figure 10 の左図の様にインターバル I による foliation の構造が入る. $N(B)$ の境界は垂直面 $\partial_v N(B)$ と水平面 $\partial_h N(B)$ に分かれる. ここで Agol の論文に従い $\text{Guts}(B) =$

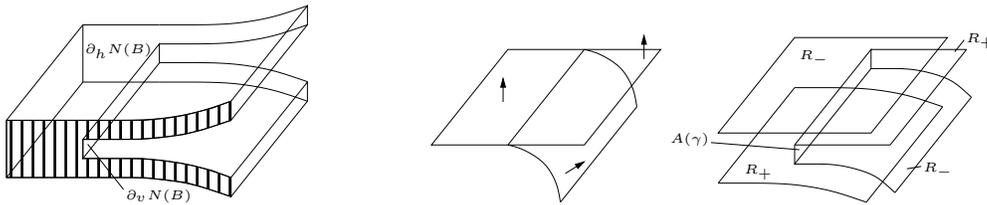


FIGURE 10. 左図は branched surface B の近傍 $N(B)$. 右図は向き付けられた branched surface の補空間の sutured manifold の構造を表す.

$M \setminus B$ と定義する. これは他の Agol の論文に出てくる Guts とは定義が違う物である事を注意しておく. ($N(B)$ を JSJ 分解に出てくる曲面上の I -bundle の様に思えば, その補空間を Guts と呼ぶのは自然ではある.) さらに B に向きが入る場合には $\text{Guts}(B) = M \setminus N(B)$ に $A(\gamma) = \partial_v N(B)$, $R(\gamma) = \partial_h N(B)$ となるように sutured manifold の構造が入る. $f \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ の元に対しては $\overline{N}_f = N(\overline{B}_f)$, $N_f = N(B_f)$ と定義する. このとき $\text{Guts}(B_f)$ は taut sutured manifold になる. これを $(\text{Guts}(B_f), \gamma(B_f))$ と書く事にする.

補題 6.6 (Lem 4.3 [Ago08]). $f \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ とする. もし $(\text{Guts}(B_f), \gamma(B_f))$ が product sutured なら f はファイバー類になる.

Proof. F を f から決まる canonical lw-taut surface とする. F は N_f 内に入る. N_f を F の近傍の境界 ($2F$ と思える) で切り開いた物を L_F と書く事にする (Figure 11). L_F には Figure 11 にあるように F を底空間とする I バンドルの構造が入る. $(\text{Guts}(B_f), \gamma(B_f))$ が product sutured であれば L_F と $\text{Guts}(B_f)$ を $\gamma(B_f)$ に沿って貼りあわせる事で $L_F \cup \text{Guts}(B_f)$ に I バンドルの構造が入る. この境界は $2F$ であり, 再び貼りあわせる事で M に F をファイバーとするファイブレーションの構造が入る事がわかる. \square

補題 6.6 より十分大きい i に対して $\text{Guts}(B_{f_i})$ が product sutured, とくに sutured ball からなる事が示されれば f_i は M_i のファイバー構造を定める事になり証明が終わる.

つぎに $\text{Guts}(\overline{B}_f)$ に対する complexity を定義する. まず $\text{Guts}(\overline{B}_f)$ の連結成分 Q に対すして, $c(Q)$ を Q 内の \overline{B}_f と交わらないようにとれる normal disk のタイプのうち \overline{N}_f 内に normal isotopy で動かせないものの数とする (Figure 12). これを用いて $c(\text{Guts}(\overline{B}_f)) = \max\{c(Q) \mid Q \text{ は } \text{Guts}(\overline{B}_f) \text{ の連結成分}\}$ と定義する. 定

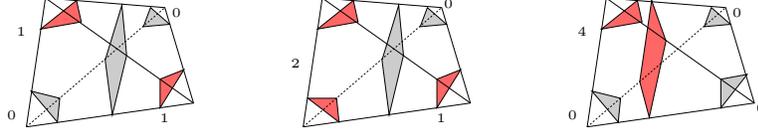


FIGURE 12. 黒は C_f に現れるディスクのタイプを表す. これらをくっつけて \overline{B}_f が構成された. 赤は $c(Q)$ に寄与するディスクを表す. (右図ではあと 2 つ $c(Q)$ に寄与する四角形がとれるがうまく描けないので省略した.)

義から

- 連結成分 $Q \subset \text{Guts}(\overline{B}_f)$ に対し, $c(Q) \leq c(\text{Guts}(\overline{B}_f))$.
- $C_f \subset C_g$ すなわち $\overline{B}_f \subset \overline{B}_g$ ならば $\text{Guts}(\overline{B}_f) \supset \text{Guts}(\overline{B}_g)$. Q を $\text{Guts}(\overline{B}_g)$ の連結成分とする. このとき $\text{Guts}(\overline{B}_f)$ の連結成分 Q' で $Q' \supset Q$ となるものが存在する. (Q' を $\overline{B}_g \setminus \overline{B}_f$ で切った一部が Q になっている.) このとき $c(Q') \geq c(Q)$. また等号が成り立つ時 $Q' = Q$.

ある i に対し, すべての $Q \subset \text{Guts}(B_{f_i})$ が単連結ならば, Q は taut sutured ball になり, 補題 6.6 より f_i はファイバー構造を与えるので証明することはない. ある $Q \subset \text{Guts}(B_{f_i})$ が単連結でない場合, ある $J > i$ が存在して $c(\text{Guts}(\overline{B}_{f_J})) < c(\text{Guts}(\overline{B}_{f_i}))$ となることを示すのが目標である. このように complexity が必ず減っていく事から, ある段階から $\text{Guts}(B_{f_i})$ が taut sutured ball からなる事が示され, 証明が完了する.

そこである i に対し, ある $Q \subset \text{Guts}(B_{f_i})$ で $\pi_1(Q) \neq 1$ である物が存在すると仮定する. B_{f_i} は RIB だったので $\pi_1(Q) \rightarrow \pi_1(\text{Guts}(B_{f_i}))$ は単射になる. $\cap_i G_i = 1$ なので, ある $j = j(Q) > i$ が存在して, $\pi_1(Q) < G_j$ だが $\pi_1(Q) \not< G_{j+1}$ となる. よって $g \in \pi_1(Q) < G_j$ だが $g \notin G_{j+1}$ となる元が存在する. g は G_i/G_{i+1} の中で非自明な元なので, RFRS の仮定から $H_1(M_i; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ の非自明な元をあたえる. ここで $\pi_1(Q) < G_i$ より Q のリフト $Q' \subset M_j$ が存在する ($p_{j,i}|_{Q'} : Q' \rightarrow Q$ は同相). $\overline{Q} = Q \cap \text{Guts}(\overline{B}_{f_i})$ とすると $\overline{Q} \subset Q$ も $Q' \subset M_j$ にリフトする.

ここで [Tol93, Thm 3.2] より F_i が T_i に関して lw-taut なら $p_{j,i}^{-1}F_i$ は T_j に関して lw-taut になる. よって

$$p_{j,i}^{-1}(\overline{B}_{f_i}) = \overline{B}_{p_{j,i}^{-1}f_i} \subset \overline{B}_{f_j} \subset M_j$$

となるので, $\overline{Q}' \subset \text{Guts}(p_{j,i}^{-1}(\overline{B}_{f_i})) \supset \text{Guts}(\overline{B}_{f_j})$ となる. \overline{Q}' は \overline{B}_{f_j} によって分解されるので, その成分を \overline{Q}_j と書くことにする. $\overline{Q}_j \subset \overline{Q}' \subset Q' \subset M_j$ より

$$(7.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \text{trivial by Cor 6.8} & & & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowleft & & \\ H^1(M_j) & \longrightarrow & H^1(Q') & \longrightarrow & H^1(\overline{Q}') & \longrightarrow & H^1(\overline{Q}_j) \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowright & & \\ & & \text{non-trivial by } g & & & & \end{array}$$

ここで $\overline{Q}_j \subset \overline{Q}'$ より $c(\overline{Q}_j) \leq c(\overline{Q}')$ が成り立つ. もし $c(\overline{Q}_j) = c(\overline{Q}')$ ならば $\overline{Q}_j = \overline{Q}'$ で, $H^1(\overline{Q}_j) \cong H^1(\overline{Q}')$ だから (7.1) に矛盾. よって $c(\overline{Q}_j) < c(\overline{Q}')$ となり, $c(\overline{Q}_j) < c(\text{Guts}(B_{f_i}))$ が分かる.

$Q \subset \text{Guts}(B_{f_i})$ を動かして, $c(\overline{Q}_{j(Q)})$ が最大になる物を J とすれば $c(\text{Guts}(B_{f_J})) < c(\text{Guts}(B_{f_i}))$ となる. \square

8. NPC CUBE COMPLEX

8.1. **CAT(0) space.** (X, d) を距離空間とする. $x, y \in X$ を結ぶ測地線とは $[a, b] \subset \mathbb{R}$ から X への等長写像で a を x , b を y へ移す物の事を言う. X の任意の 2 点が測地線で結べる時, X を測地空間 (geodesic space) と言う. $x, y \in X$ に対して一般にはその 2 点を結ぶ測地線は一意的とは限らないが, x と y を結ぶ測地線を単に $[x, y]$ と書くことにする.

定曲率空間 M_κ^2 を次で定義する.

$$M_\kappa^2 = \begin{cases} (\mathbb{S}^2, \frac{1}{\sqrt{\kappa}} d_{\mathbb{S}^2}) & \kappa > 0 \text{ のとき,} \\ (\mathbb{E}^2, d_{\mathbb{E}^2}) & \kappa = 0 \text{ のとき,} \\ (\mathbb{H}^2, \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} d_{\mathbb{H}^2}) & \kappa < 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

M_κ^2 の直径 D_κ を $\kappa \leq 0$ のとき $D_\kappa = \infty$, $\kappa > 0$ のとき $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ で定義する. $d(x, y) < D_\kappa$ のとき x と y を結ぶ M_κ^2 内の測地線は一意的に決まる.

X を測地空間とする. $p, q, r \in X$ に対し, 測地三角形 $[p, q] \cup [q, r] \cup [r, p]$ を考える. $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p) < 2D_\kappa$ であるとき M_κ^2 の中の 3 点 $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ で $d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q)$, $d(\bar{q}, \bar{r}) = d(q, r)$, $d(\bar{r}, \bar{p}) = d(r, p)$ となる測地三角形 $[\bar{p}, \bar{q}] \cup [\bar{q}, \bar{r}] \cup [\bar{r}, \bar{p}]$ が存在する (等長変換を除いて一意). $x \in [p, q]$ とする. このとき $\bar{x} \in [\bar{p}, \bar{q}]$ で $d(\bar{p}, \bar{x}) = d(p, x)$ となる点が一意に存在する (Figure 13). 同様に $y \in [p, r]$ に対して $d(\bar{p}, \bar{y}) = d(p, y)$ となる $\bar{y} \in [\bar{p}, \bar{r}]$ をとる.

定義 8.1. X を距離空間とする. (1) X が測地空間で任意の測地三角形 $[p, q] \cup [q, r] \cup [r, p]$ と $x \in [p, q]$, $y \in [p, r]$ に対し,

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$$

が成り立つとき, X を $CAT(\kappa)$ 空間という. (2) X の任意の点 x に対し, x を中心とするある球 $B(x, r_x)$ で $CAT(\kappa)$ 空間となるものが存在する時, X の曲率が $\leq \kappa$ であるという. とくに ≤ 0 となる空間を *non-positively curved (NPC)* または *locally CAT(0)* という.

($\kappa > 0$ の場合には $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p) < 2D_\kappa$ となるように測地三角形をとる必要がある. 以降 $\kappa > 0$ の場合の直径に関する条件は省略する. 詳しくは [BH99] を参照.)

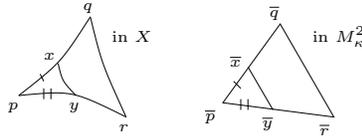


FIGURE 13.

例 8.2. X が Riemann 多様体であるとき, X には曲線の長さが定まり, その inf をとることで X は距離空間になる. また局所的には測地線は一意なので任意の点の近傍で測地三角形を考える事ができる. X の断面曲率が $\leq \kappa$ であることと, X が距離空間として $\leq \kappa$ となることは同値になる. (たとえば [BH99, Chapter II.1A6])

命題 8.3. X を $CAT(0)$ 空間とする.

- (1) X 内の 2 点を結ぶ測地線は一意 ([BH99, Ch. II, Prop. 1.4]).
- (2) X 内の完備な凸集合 C に対して X から C への最短点を与える写像 π は変位レトラクションになる ([BH99, Ch. II, Prop. 2.4]). とくに C として一点を考えると $CAT(0)$ 空間は可縮になる.

Sketch of proof. (1) $p, q \in X$ を結ぶ 2 つの測地線 $[p, q]$, $[p, q]'$ を考える. $r \in [p, q]$ と $r' \in [p, q]'$ を $d(p, r) = d(p, r')$ となる点とする. $[p, r]$ と $[r, q]$ を $[p, q]$ の部分測地線とし, 測地三角形 $[p, r] \cup [r, q] \cup [p, q]'$ を考える. $d(p, r) + d(r, q) = d(p, q)$ より \mathbb{E}^2 内の比較三角形は一直線になる. よって $d(r, r') \leq d(\bar{r}, \bar{r}') = 0$ より $r = r'$. 従って $[p, q] = [p, q]'$ となる.

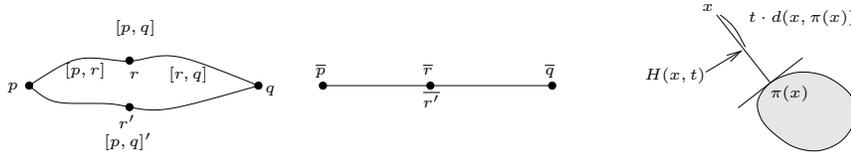


FIGURE 14.

(2) $x \in X$ に対して, $y_i \in C$ で $d(x, y_i) \rightarrow d(x, C)$ となる点列をとってくる. これは Cauchy 列になる事が示され, C の完備性から y_i の極限が存在する. これを $\pi(x)$ とし $\pi: X \rightarrow C$ を定義する. $x \in X$ と $t \in \times[0, 1]$ に対し $H(x, t)$ を $[x, \pi(x)]$ 上の点で $d(H(x, t), x) = t \cdot d(x, \pi(x))$ となるものとして定義する. $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ は X の恒等写像から π へのホモトピーを与えることがわかる. \square

完備 Riemann 多様体の場合と同様に次の定理が成り立つ (詳しくは [BH99, Ch. II.4] を参照):

定理 8.4 (Cartan-Hadamard の定理). 完備測地空間 X が NPC ならば普遍被覆 \tilde{X} は $CAT(0)$.

ある距離空間の曲率が $\leq \kappa$ であるか, とくに NPC であるかどうかは, 局所的に判定できる.

定義 8.5 (κ -cone). Y を距離空間とする. $\kappa \leq 0$ のとき $X = C_\kappa Y$ を $[0, \infty) \times Y$ の $(0, y)$ の点を同一視した空間として定義する. $C_\kappa Y$ には次のように距離を定義する. まず Y 上の距離 d_π を $d_\pi(y, y') = \min\{\pi, d(y, y')\}$

で定義する. このとき $C_\kappa Y$ の距離を

$\kappa = 0$ のとき

$$d((t, y), (t', y')) = t^2 + t'^2 - 2tt' \cos(d_\pi(y, y')),$$

$\kappa < 0$ のとき

$$\cosh(d((t, y), (t', y'))) = \cosh(\sqrt{-\kappa}t) \cosh(\sqrt{-\kappa}t') - \sinh(\sqrt{-\kappa}t) \sinh(\sqrt{-\kappa}t') \cos(d_\pi(y, y')),$$

で定義する.

$\kappa > 0$ の場合も同様に定義されるが省略する. 詳しくは [BH99, Ch. I.5.6] を参照. $Y = \mathbb{S}^{n-1}$ ならば $C_\kappa Y$ は M_κ^n と等長になることが示される [BH99, Ch. I.5.8]. さらに次の事実が知られている.

定理 8.6 (Berestovskii ([BH99] の Ch. II. Thm 3.14)). 距離空間 Y に対し, Y が $CAT(1)$ である事と $C_\kappa Y$ が $CAT(\kappa)$ である事は同値.

よって距離空間 X の曲率が $\leq \kappa$ である事を示すには, X の各点で κ -cone となる近傍がとれる事を示せば必要充分である. これから述べる cube complex では, この条件を完全に組み合わせ的に記述することができる.

8.2. Cube complex. $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ とする. 以下 n 次元立方体 $I^n = [-1, 1]^n$ をユークリッド距離により距離空間と見なす. $\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_k} \in \{\pm 1\}$ に対し, $\{x_{i_j} = \epsilon_{i_j} (j = 1, \dots, k)\}$ で定義される I^n の部分集合を I^n の $((n-k)$ 次元の) 面とよぶ.

定義 8.7. X を CW 複体とし, その k -skeleton を X^k と書くことにする. X の各 k -cell が I^k と同一視でき, 貼り合わせ写像 $\partial I^k \rightarrow X^{k-1}$ が ∂I^k の各面の内部を X^{k-1} の面の内部に等長に移す写像であるとき, X を *cube complex* と呼ぶ.

注 8.8. Bridson-Haefliger の本 [BH99] ではより一般に M_κ 内の凸多面体を用いて M_κ -polyhedral complex を定義している. とくに \mathbb{E}^n 内の辺の長さが 1 の立方体のみを用いて構成された物を cubed complex と定義している. Cubed complex のうち, (1) 張り合わせ写像 $\partial I^k \rightarrow X^{k-1}$ が単射であり, (2) 2つの cell の交わりは高々一つの面でしか交わらない, ものを cubical complex と定義している [BH99, Ch. II.7.40]. このノートで cube complex と呼んでいる物は Bridson-Haefliger の本での cubed complex と (1 辺の長さが 1 か 2 かの些細な違いを除けば) 同じである.

X 内のパスに対して, 各 I^n での制限をユークリッド距離で測ればパスの長さが定まる. X 内の 2 点 x, y に対し, x と y を結ぶすべてのパスを考え, それらの長さの \inf をとる事で擬距離が定まる. (擬距離 (pseudo metric) とは距離の公理のうち $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ を除いた物である.) 次の定理が成り立つ:

定理 8.9 (Bridson). X が有限次元なら, X は完備な測地空間.

これは [BH99, Ch. I.7.50] の特別な場合である. Cell の数が無限であったり, X が locally compact でなくとも上の定理は成り立つ事を注意しておく.

例 8.10. (1) 各 cell の辺の長さが一定という条件は重要である. 頂点が 2 点 x, y , 辺が $e_n (n = 1, 2, \dots)$ で定まるグラフを考える. e_n の長さを $l(e_n) = 1/n$ で定義すると, $d(x, y) = 0$ となり距離にならない. $l(e_n) = 1 + 1/n$ と長さを定義すると距離空間にはなるが, x, y を結ぶ測地線が存在しないので測地空間ではない. また $[0, 1) = [0, 1/2] \cup [1/2, 3/4] \cup [3/4, 7/8] \cup \dots$ を考えると, これは測地空間であるが, 完備ではない.

(2) 有限次元という条件は必要である. 可分な Hilbert 空間 H と正規直交基底 e_1, e_2, \dots を固定する. $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ の有限部分集合ではられる H 内の cube 全体は cube complex になるが, これは完備ではない.

8.3. NPC cube complex. この節での結果は Gromov [Gro87] によって得られたものであるが, 引用は [BH99] からすることにする.

$I^n = [-1, 1]^n \subset \mathbb{E}^n$ の点 x に対し, x のリンク $Lk(x)$ を x における I^n への単位ベクトルの集合とする. よって $Lk(x)$ には $\mathbb{S}^{n-1} \subset T_x \mathbb{E}^n$ の部分集合として距離構造が入る事がわかる. また $Lk(x)$ は \mathbb{S}^{n-1} の多面体になり, 面の間角度はすべて $\pi/2$ となる. 指数写像 $T_x \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ を考える事で, $C_0(Lk(x))$ の cone point の ϵ -近傍は x の I^n 内での ϵ -近傍と同一視できる. とくに x が I^n の頂点である場合には $Lk(x)$ は \mathbb{S}^{n-1} 内のすべての面角が $\pi/2$ の simplex となる.

X を cube complex とする. $x \in X$ に対し, x を含む各 cube でリンクをとった物をつなぎあわせる事で $Lk(x)$ が定義できる. 定理 8.6 により各点 $x \in X$ で $Lk(x)$ が $CAT(1)$ ならば X は locally $CAT(0)$ になる事がわかる. x が k -skeleton に入っている時, その点を X の頂点に近づけてもリンクは変わらないので, 結局 X の頂点でのリンクのみを考えればよいことになる. x が X の頂点である時, $Lk(x)$ はすべての面角が $\pi/2$ の spherical simplex からなる複体なので状況が非常に簡単になる.

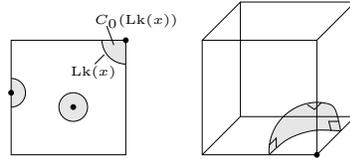


FIGURE 15.

定義 8.11. L を単体的複体とする. L の頂点 $\{v_0, \dots, v_k\}$ の任意の 2 点が互いに辺で結ばれるならば, $\{v_0, \dots, v_k\}$ は L のある k -単体の頂点になるとき, L は flag complex であるという.

定理 8.12 (Ch. II.5.18 [BH99]). L はすべての面角が $\pi/2$ の spherical simplex からなる複体とする. このとき L が $CAT(1)$ である事と flag complex である事は同値.

この定理から cube complex X が NPC かどうかはリンクが flag complex かどうかを確かめることで分かる.

定理 8.13 (Gromov's NPC condition). X を cube complex とする. 各頂点でのリンクが flag complex であることと, X が locally $CAT(0)$ (NPC) である事は同値.

まず cube complex X のある頂点におけるリンクは一般には単体的複体にはならない事を注意しておく (Figure 16). Flag complex になると言ったときには, リンクが単体的複体になっている事も保証している.

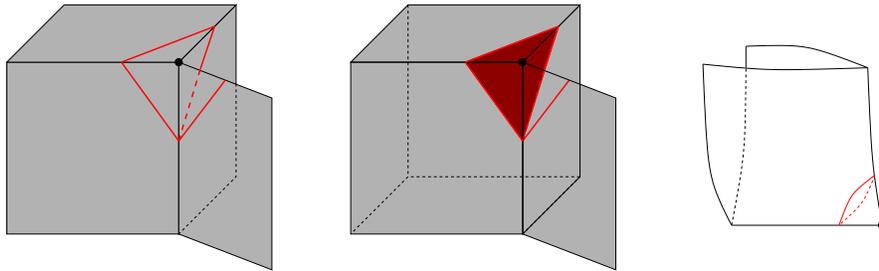


FIGURE 16. 左図は 4 つの正方形からなり, 中図は 1 つの立方体と 1 つの正方形からなる. 黒の頂点におけるリンクは左図では flag ではなく, 中図では flag になっている. 右図はリンクが単体的複体になっていない.

NPC cube complex はその 2-skeleton の情報だけで決まってしまう:

補題 8.14 (Lemma 2.5 [HW08]). X_1 と X_2 を NPC cube complex とする. X_1 の 2-skeleton を $X_1^{(2)}$ とする. $\phi: X_1^{(2)} \rightarrow X_2$ を組み合わせ写像 (combinatorial map) とする (すなわち CW 複体の複体写像). このとき ϕ は $X_1 \rightarrow X_2$ に一意に拡張する. とくに NPC cube complex はその 2-skeleton で完全に決まる.

8.4. Salvetti complex for RAAG. Γ を単体グラフとし, 対応する RAAG A_Γ を考える. このとき A_Γ を基本群に持つ NPC cube complex S_Γ を次のように構成できる. まず S_Γ の 0 単体として 1 点を取ってくる. 次に Γ の頂点 $V(\Gamma)$ ごとに 1-cube をはる. もし $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ が辺で結ばれていた場合には, 2-cube を $v_1 v_2 v_1^{-1} v_2^{-1}$ にそってはる. つぎに $v_1, v_2, v_3 \in V(\Gamma)$ が Γ の中で完全グラフを張るならば, 3-cube をはる. 同様に $v_1, v_2, \dots, v_k \in V(\Gamma)$ が Γ の中で完全グラフを張るならば k -cube をはっていく. 構成から S_Γ は n 次元トーラスの標準的なセル分割の部分複体になっている. Γ が完全グラフなら S_Γ は n 次元トーラスで, Γ が頂点のみからなる場合は n 個の S^1 のウェッジになる.

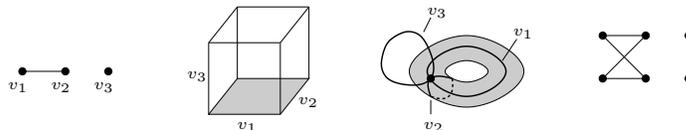


FIGURE 17. Salvetti 複体の例. 右のグラフは頂点でのリンクを表す.

S_Γ の唯一つの頂点でのリンクをみるとこれは flag complex になっている事がわかる. よって S_Γ は NPC cube complex である. とくにその普遍被覆は $CAT(0)$ 空間で可縮となる. また 2-cube の貼り方から $\pi_1(S_\Gamma) \cong A_\Gamma$ である. よって S_Γ は A_Γ の Eilenberg-MacLane 空間である.

系 8.15. A_Γ は有限次元の Eilenberg-MacLane 空間 S_Γ をもつ. とくに A_Γ のホモロジー次元は有限であり, A_Γ は torsion free.

9. SPECIAL CUBE COMPLEX

前節で RAAG を基本群に持つ NPC cube complex, ‘Salvetti complex’ が定義できる事がわかった. どのような NPC cube complex が Salvetti complex (またはその部分空間) として実現できるかを特徴付けるのが special cube complex の概念である [HW08].

9.1. **Hyperplanes.** I^n の中にはある座標を 0 にする事で $(n-1)$ 次元の cube が定義できる. これを midcube とよぶ. X を cube complex とする. X の各 cube の中の midcube は X の貼り合わせ写像から cube complex の構造を持つ事がわかる. このように midcube からできた cube complex の連結成分を X の *hyperplane* と呼ぶ. X が NPC cube complex であれば hyperplane Y も NPC cube complex になる事が定義から直ちに従う.

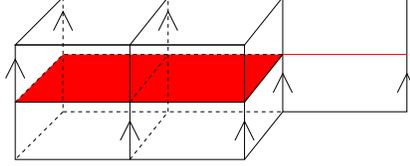


FIGURE 18. 赤は hyperplane, 向きの付いた辺 (の同値類) は wall を表す.

I^n の各 midcube にはそれと直交する辺が 2^{n-1} 本ある. X の辺の間に, 同じ hyperplane に直交する物を同じとする同値類を考慮することができる (Figure 18). このような辺の同値類を *wall* とよぶ [HW08]. 定義から hyperplane と wall は本質的に同じ概念である.

Hyperplane Y の X の中での近傍を考えることで, Y が “2-sided である” が意味をもつ. 一般に NPC cube complex の hyperplane は自己交差を持つかもしれないし, 2-sided でないかもしれない. しかし次の定理が成り立つ.

定理 9.1 (Sageev [Sag95], [Wis11a] の Thm 2.11). $CAT(0)$ cube complex X の hypersurface Y は再び $CAT(0)$ cube complex で元の cube complex の中に埋め込まれていて 2-sided. さらに $Y \times I$ は X の中で convex で, $X \setminus Y$ は 2 つの連結成分からなる.

この定理により普遍被覆をとれば hyperplane は埋め込みに持ち上がる事が分かる. (ある状況のもとでは, 有限の被覆で交差が解消できることを保証するのが Agol の定理 [AGM12] といえる.) この定理のわかりやすい証明が [Wis11a] の §3 にある.

9.2. **Local isometry.** $f : Y \rightarrow X$ を距離空間の間の写像とする. すべての $y \in Y$ に対し, ある $\epsilon_y > 0$ がとれて, f の $B(y, \epsilon_y)$ への制限がその像への等長写像であるとき f を *local isometry* とよぶ.

次の命題 9.2 を述べるため若干の用語を準備する. 距離空間 (X, d) 内のパス $c : [a, b] \rightarrow X$ に対して, c の長さを

$$l(c) = \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$$

で定義する. 距離空間 (X, d) が任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = \inf\{l(c) \mid c \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶパス}\}$ を満たすとき, X は *length space* であるという.

命題 9.2 (Ch. II.4.14 [BH99]). X と Y を完備で連結な距離空間とする. X が NPC で, Y は各点で *length space* である近傍がとれる (局所的に *length space*) とする. $f : Y \rightarrow X$ を距離空間の間の *local isometry* とする. このとき

- (0) Y は NPC.
- (1) $f_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, f(y_0))$ は単射.
- (2) X, Y の普遍被覆をそれぞれ \tilde{X}, \tilde{Y} とすると, f のリフト $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ は等長な埋め込み.

定理 8.9 より X と Y が連結な cube complex で X が NPC であれば, 命題 9.2 の条件は満たされる. NPC cube complex が組み合わせ的に特徴付けられたのと同様に, local isometry も組み合わせ的に特徴付けできる.

定義 9.3. $\phi : Y \rightarrow X$ を cube complex の間の組み合わせ写像とする (すなわち CW 複体の複体写像). すべての Y の頂点 y に対し ϕ の誘導する写像 $\text{Lk}(y) \rightarrow \text{Lk}(\phi(y))$ が単射で, $\text{Lk}(y)$ が $\text{Lk}(\phi(y))$ の中で full subcomplex ($\text{Lk}(\phi(y))$ の中の k -単体が $\text{Lk}(y)$ の k -単体の像となる) になっているとする. このとき ϕ を *local isometry* という.

X が NPC であるとき, cube complex の間の組み合わせ写像 $\phi : Y \rightarrow X$ が距離空間として local isometry である事と, 上の local isometry の定義は同値である事が次のようにしてわかる. 各 $y \in Y$ の近傍は $\text{Lk}(y)$ の 0-cone $C_0 \text{Lk}(y)$ の cone point の近傍と等長なので, $\phi : \text{Lk}(y) \rightarrow \text{Lk}(\phi(y))$ が等長な埋め込みである事と $\text{Lk}(y)$ が $\text{Lk}(\phi(y))$ の中で full subcomplex になっている事が同値である事を示せば良い. $\phi : \text{Lk}(y) \rightarrow \text{Lk}(\phi(y))$ が

等長な埋め込みであれば $\text{Lk}(y) \rightarrow \text{Lk}(\phi(y))$ は単射であり、等長であることから $\text{Lk}(y)$ の k -単体は $\text{Lk}(\phi(y))$ の k -単体にうつる。逆に $\text{Lk}(y)$ の k -単体が $\text{Lk}(\phi(y))$ の k -単体に移れば、パスを用いて距離を定義したことから $\text{Lk}(y) \rightarrow \text{Lk}(\phi(y))$ は等長になる。

X と Y がともに NPC であるときにはリンクが flag complex であることから full subcomplex の条件は、“ $\text{Lk}(\phi(y))$ の中で隣り合っている $\phi(\text{Lk}(y))$ の 2 点が $\phi(\text{Lk}(y))$ の中で隣り合う” 事と同値になる。

9.3. Special cube complex.

定義 9.4 ([HW08]). Cube complex X に対して、次の条件を考える (Figure 19) :

- (1) 各 hyperplane は埋め込まれている。
- (2) 各 hyperplane は 2-sided である (hyperplane に直交する向き付けられたベクトルが定まる)。
- (3) Direct osculation がない。
- (4) Indirect osculation がない。
- (5) Inter osculation がない。

X が (1), (2), (3), (5) を満たす時 ((4) は含まない), X は special であるという。

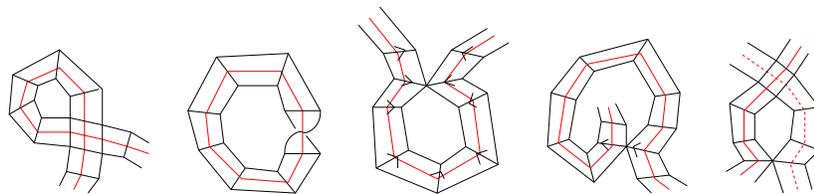


FIGURE 19. (1) 埋め込みでない, (2) 2-sided でない, (3) direct osculation, (4) indirect osculation, (5) inter osculation.

注 9.5. Haglund-Wise の原論文では、これを A-special と呼んでいる [HW08, Def. 3.2]. このノートでは最近の論文 [Wis11b] と [Wis11a] に従いこれを単に special とよぶ。

Osculation に関する正確な定義は次のとおりである :

- H を cube complex X の hyperplane とする。 H に双対な 2 つの異なる辺 e_1 と e_2 で頂点を共有するものが存在する時 H は self-osculate するという。さらに H が 2-sided であるとき、 e_1 と e_2 には向きが入る。それぞれの辺の始端で頂点を共有するとき direct osculate するという。(辺の向きを入れ替えば終端が一致するとしても同値。) 片方の始端ともう片方の終端を共有する時 indirect osculate するという。
- Cube complex X の 2 つの hyperplane H_1 と H_2 がどこかの cube で交わる (square を共有する) とする。 H_1 , H_2 と双対な辺 e_1 と e_2 で、頂点を共有するが square を共有しないものが存在するとき inter osculate するという。(例えば Figure 20 の状況は inter osculation ではない。)

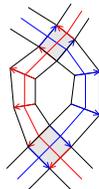


FIGURE 20.

たとえば、定理 9.1 より CAT(0) cube complex は special である。 Salvetti complex S_Γ はトーラスの標準的な cell 分割の部分複体になっている事を思い出せば、 S_Γ が special である事は直ちに分かる。実は次の定理が成り立つ :

定理 9.6 (Haglund-Wise Thm 1.1 [HW08], Lem 4.4 [Wis11a] も参照). X を compact NPC cube complex とする。このとき X が special である事と、 X からある RAAG の Salvetti complex への local isometry が存在する事は同値。

Proof. まず定義から local isometry $X \rightarrow Y$ があるとき、 Y が special なら X も special. とくに Salvetti complex への local isometry $X \rightarrow S_\Gamma$ があれば X は special. よって逆が非自明な問題になる。

X を special cube complex とする. このとき X の hyperplane を頂点とし, 辺は2つの hyperplane が交わるとき張るものとして, 単体的グラフ Γ が定義できる. Γ に対する Salvetti complex を \mathcal{S}_Γ とする. X がコンパクトであるから Γ は有限である.

各 hyperplane は 2-sided であるから, X の各辺に向きを入れる事ができる. X の向き付けられた辺の同値類 (wall) が Γ の辺に対応するので, X の 1-skeleton $X^{(1)}$ から \mathcal{S}_Γ の 1-skeleton に写像をつくる事ができる.

X の hyperplane は埋め込まれている事から, X の 2-cube 内の2つの midcube は必ず異なる hyperplane に属している事がわかる. Salvetti complex の定義から \mathcal{S}_Γ の中に対応する 2-cube が存在する. この対応によって 2-skeleton の間の写像 $X^{(2)} \rightarrow \mathcal{S}_\Gamma^{(2)}$ に拡張する. 同様に X の k -cube の k 個の midcube はそれぞれ異なる hyperplane に属している事から k -skeleton への拡張 $X^{(k)} \rightarrow \mathcal{S}_\Gamma^{(k)}$ が自然に定義できる. このようにして (1) と (2) の条件から組み合わせ写像 $\phi: X \rightarrow \mathcal{S}_\Gamma$ が構成される.

つぎに ϕ が local isometry になっている事を確かめる. 頂点 $x \in X^{(0)}$ に対し $\text{Lk}(x) \rightarrow \text{Lk}(\phi(x))$ が単射で, 像が full subcomplex になっていけばよい.

$\text{Lk}(x) \rightarrow \text{Lk}(\phi(x))$ が単射であるためには x を頂点とする 2 つ異なる辺 e_1 と e_2 が \mathcal{S}_Γ の中で異なる辺に移っていることが必要十分である. e_1 と e_2 が \mathcal{S}_Γ の同じ辺に移るという事は e_1 と e_2 が (向きを込めて) 同じ hyperplane に属しているという事である. このとき x はこの hyperplane の direct osculate する点になる. すなわち $\text{Lk}(x) \rightarrow \text{Lk}(\phi(x))$ が単射であることと, direct osculation がないことは同値である.

$\text{Lk}(x) \rightarrow \text{Lk}(\phi(x))$ の像が full subcomplex である事を確かめる. すなわち $\phi(\text{Lk}(x))$ の 2 つの頂点が辺を張る時 $\text{Lk}(x)$ の中で辺を張る事を確かめる. $\phi(\text{Lk}(x))$ の 2 つの頂点はそれぞれ x を頂点とする X の辺 e_1 と e_2 に対応しているとする. これが $\text{Lk}(\phi(x))$ の中で辺を張る事と $\phi(e_1)$ と $\phi(e_2)$ の間に 2-cube がある事は同値, すなわち e_1 と e_2 がそれぞれ互いに交わる hyperplane に属している事と同値である. e_1 と e_2 を $\text{Lk}(x)$ の頂点として見た時, これらの間に辺が存在する事と e_1 と e_2 を辺に持つ square が X の中に存在する事は同値である. すなわち e_1 と e_2 は x で inter osculate しないこと同値である. よって $\text{Lk}(x) \rightarrow \text{Lk}(\phi(x))$ の像が full subcomplex である事と inter osculation がない事は同値である. \square

命題 9.2 により次がいえる:

系 9.7. 群 G が compact NPC special cube complex の基本群ならば, G は RAAG の部分群.

10. LERF

X を曲面とする. 曲面の中の閉曲線 γ を考える. 但し γ は 1 点にホモトピックでないとする. 一般には γ をアイソトピーで動かしても γ の交点を取り除けないかもしれないが, ある有限の被覆 $X' \rightarrow X$ に持ち上げると γ の交点を取り除ける可能性がある (Figure 21).

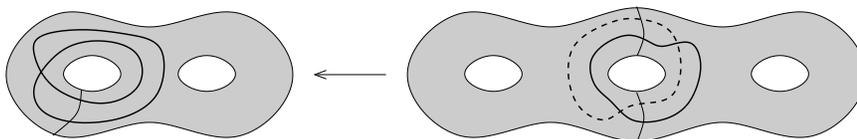


FIGURE 21.

この問題を次のように一般化する: $\pi_1(X)$ の有限生成部分群 H に対して, ある有限被覆 $p: X' \rightarrow X$ と部分曲面 $i: Y' \subset X'$ で $p_*(i_*\pi_1(Y')) = H$ となる物がとれるかという問題を考える事ができる.

$$\begin{array}{ccc} Y' \subset X' & , & \pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & & \pi_1(X) \end{array}$$

上の例の場合 $H = \langle \gamma \rangle$ で, Y' として γ のリフトの近傍をとればよい. このような有限被覆は確かに存在する事が Scott により示されている [Sco78]. これは $\pi_1(S)$ が LERF であるという事と密接に関係している.

定義 10.1. G を群とする. G の部分群 H に対して,

$$H = \bigcap_{G > K > H, [G:K] < \infty} K$$

が成り立つ時, H は分離的 (separable) であるという. G の任意の有限生成部分群 H が分離的である時, G は locally extended residually finite (LERF) であるという.

とくに有限生成部分群として $\{e\}$ を考えると, LERF なら residually finite であることが分かる. G が CW 複体 X の基本群である時, G が LERF であることを幾何学的に特徴付ける事ができる. まず residually finite の場合について考える.

補題 10.2. X を CW 複体とし, \tilde{X} をその普遍被覆とする. 次の条件は同値:

- (1) $G = \pi_1(X)$ は *residually finite*.
- (2) 任意のコンパクト部分集合 $C \subset \tilde{X}$ に対して, 次の性質を満たす有限指数部分群 $G_1 < \pi_1(X)$ が存在する: $g \in G_1 (g \neq 1)$ に対して $g \cdot C \cap C = \emptyset$ (すなわち $\{g \in G_1 \mid g \cdot C \cap C \neq \emptyset\} = \{1\}$).
- (3) 任意のコンパクト部分集合 $C \subset \tilde{X}$ に対して, 次の性質を満たす有限指数部分群 $G_1 < \pi_1(X)$ が存在する: 合成 $C \subset \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G_1$ が中への同相.

Proof. (2) と (3) が同値である事は明らか. (1) と (2) が同値である事を示す.

まず任意のコンパクト部分集合 $C \subset \tilde{X}$ に対して $g \cdot C \cap C \neq \emptyset$ となる $g \in G$ は有限個である事を注意しておく. 実際 C がコンパクトなので, C は有限個のセルで覆える事, デッキ変換はセルを保つ写像である事, を考えればこのような g は有限個しかない.

G が RF であるとする. 任意のコンパクト集合 $C \subset \tilde{X}$ に対して有限部分集合 $T = \{g \in G \mid g \neq 1, g \cdot C \cap C \neq \emptyset\}$ を考える. G が RF より $t \in T$ に対して t を含まない G の有限指数部分群 G_t が存在する. $G_1 = \bigcap_{t \in T} G_t$ とすれば, G_1 は G の有限指数部分群 (補題 2.2(2)) で T の元を含まない. G_1 は T の元を含まないことから $\{g \in G_1 \mid g \cdot C \cap C \neq \emptyset\} = \{1\}$.

G は (2) を満たすとする. 任意の $g \in G$ に対し有限指数部分群 G_1 で $g \notin G_1$ となる物を見つければ良い. $x \in \tilde{X}$ をとり, コンパクト集合 $C = \{x, gx\}$ を考える. 条件からある有限指数部分群 G_1 で $\{h \in G_1 \mid h \cdot C \cap C \neq \emptyset\} = \{1\}$ となるものが存在する. ここで C の定義から $g \notin G_1$. よって G は RF. \square

補題 10.3. X を CW 複体とし, \tilde{X} をその普遍被覆とする. 次の条件は同値:

- (1) $G = \pi_1(X)$ は *LERF*
- (2) 任意の有限生成部分群 $H < G$ と, 任意のコンパクト部分集合 $C \subset \tilde{X}/H$ に対して, 次の性質を満たす有限指数部分群 $G_1 < \pi_1(X)$ が存在する: $G_1 > H$ で, 合成 $C \subset \tilde{X}/H \rightarrow \tilde{X}/G_1$ は中への同相.

Proof. G は LERF であるとする. 有限生成部分群 $H < G$ に対し自然な射影を $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/H$ とする. 任意のコンパクト部分集合 $C \subset \tilde{X}/H$ に対し, コンパクト部分集合 $D \subset \tilde{X}$ で $p(D) = C$ となる物が存在する (D は C と同相とは限らない). 補題 10.2 の証明にあるように $T' = \{g \in G \mid gD \cap D \neq \emptyset\}$ は有限集合である. $T = T' \setminus (T' \cap H)$ とする. G は LERF であるので $t \in T$ に対して H を含むが t を含まない G の有限指数部分群 G_t が存在する. $G_1 = \bigcap_{t \in T} G_t$ とすれば, G_1 は G の有限指数部分群で $G_1 > H$ かつ $T \cap G_1 = \emptyset$ をみたく. よって $g \in G_1$ が $gD \cap D \neq \emptyset$ を満たすなら $g \in T'$ かつ $g \notin T$ より $g \in H$ となる. $p(D) = C$ より $H \cdot D = p^{-1}(C)$ であるから, $g \in G_1$ が $g \cdot p^{-1}(C) \cap p^{-1}(C) \neq \emptyset$ を満たせば $g \in H$ となる. よって合成 $C \subset \tilde{X}/H \rightarrow \tilde{X}/G_1$ はその像への同相を与える.

G は (2) を満たすとする. H を G の有限生成部分群とする. 任意の $g \notin H$ に対し, 有限指数部分群 $G_1 < G$ で $G_1 > H$ かつ $g \notin G_1$ となる物が見つければ良い. $x \in \tilde{X}$ を固定する. $\{x, gx\}$ の \tilde{X}/H での像を C とする. $g \notin H$ である事から C は 2 点からなる. (2) から有限指数部分群 G_1 で $G_1 > H$ かつ $C \subset \tilde{X}/H \rightarrow \tilde{X}/G_1$ の像が 2 点となるものがある. よって $g \notin G_1$ となる. \square

補題 10.3 により曲面群が LERF である事が示されれば, 次のようにして冒頭の問題への解答を得る. X を曲面とし, $H < \pi_1(X)$ を有限生成部分群とする. H に対応した (一般には無限の) 被覆を $X_H \rightarrow X$ とする. $\pi_1(X_H) = H$ が有限生成である事から, コンパクト部分集合 $C \subset X_H$ で $\pi_1(C) \cong \pi_1(X_H) = H$ となる物が存在する (compact core). 補題 10.3 からある有限指数部分群 $G_1 < \pi_1(X)$ で $G_1 > H$ かつ合成 $C \subset X_H \rightarrow \tilde{X}/G_1$ が中への同相となる物が存在する. $X' = \tilde{X}/G_1$ とおき C の X' への像を Y' とおけば, Y' は X' の部分曲面で $\pi_1(Y') = H$ となる. (Scott の論文ではより強い主張を示している. [Sco78, Lem 1.6] を参照.)

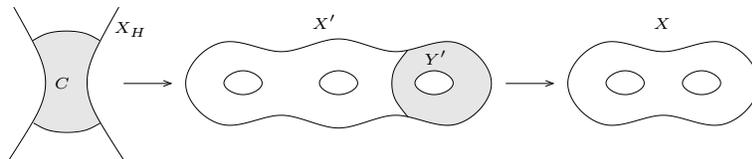


FIGURE 22.

命題 10.4. オイラー数が負の閉曲面の基本群は $RACG C_\Gamma$ ($\Gamma = \triangleleft$) の有限指数部分群になる.

Proof. Euclid 平面内の正 5 角形は角度が $3\pi/5 (> \pi/2)$ である事から, 双曲平面内の小さな等辺 5 角形をだんだん膨らませていく事で双曲直角 5 角形 P が構成できる. P の辺での鏡映で生成される群は Poincaré の多面体定理または定理 3.3 により C_Γ と同型になる. 一方でオイラー数 -1 の (向き付け不可能) 閉曲面 F は 4 つの双曲直角 5 角形に分割できる (Figure 23). よって $\pi_1(F) < C_\Gamma$ で $[C_\Gamma : \pi_1(F)] = 4$. すべてのオイラー数

が負の閉曲面は F の有限被覆から得られる事から、それらの基本群は $\pi_1(F)$ の有限指数部分群になる。よってすべてのオイラー数が負の閉曲面の基本群は C_Γ の有限指数部分群となる。 \square

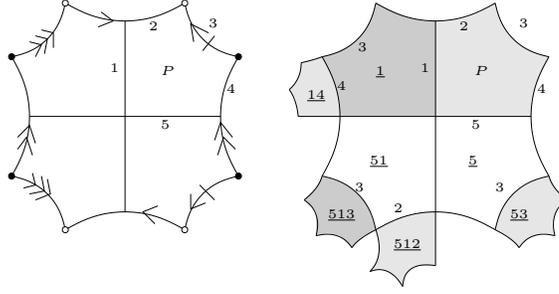


FIGURE 23. 左図はオイラー数が -1 となる閉曲面 F の基本領域。 P の辺 i に関する鏡映を g_i で書くと g_1, \dots, g_5 は C_Γ の生成元になる。右図の 53 等は g_5g_3P を表す。よって $\pi_1(F)$ は $g_1g_4, g_5g_3, g_5g_1g_3g_1, g_5g_1g_2$ で生成される部分群と同型になる。

オイラー数が正の閉曲面は球面か $\mathbb{R}P^2$ で基本群はいずれも $\mathbb{Z}/2$ の部分群となる。よって $\Gamma = \bullet$ ととれば C_Γ の部分群になる。トーラスの基本群は \mathbb{Z}^2 で、また境界付きの曲面の基本群は自由群だからこれらは RAAG であり、定理 3.7 により RACG の部分群となる。クラインボトルも有限指数部分群として \mathbb{Z}^2 を含むのでだいたい RACG であるといつてよい。

命題 10.4 より次の定理が示されれば、オイラー数が負の曲面は LERF である事がわかる。

定理 10.5 ([Sco78], [Sco85]). $RACG C_\Gamma$ ($\Gamma = \triangleleft$) は LERF.

Proof. $G = C_\Gamma$ と書くことにする。補題 10.4 の証明にあるように G は双曲直角 5 角形 P の辺に関する折り返しで生成される群と同型になる。とくに G は $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ の離散部分群として実現できる。 \mathbb{H}^2/G は orbifold なので orbifold の基本群を考えなければ補題 10.3 が適用できない。しかし G の有限指数部分群が LERF であれば G も LERF であること ([Sco78, Lem 1.1]) と Selberg の補題 (G の有限指数部分群で torsion-free な物が存在する) から次の命題と G が LERF である事は同値である：

G の有限指数部分群 H とコンパクト集合 $C \subset \mathbb{H}^2/H$ に対して、 G の有限指数部分群 G_1 で $G_1 > H$ かつ $C \subset \mathbb{H}^2/H \rightarrow \mathbb{H}^2/G_1$ が中への同相を導く物が存在する。

まず記号を準備する。 P の各辺は \mathbb{H}^2 のある測地線に含まれる。これらの測地線を G の作用で動かすことによって \mathbb{H}^2 内の測地線が得られる。これらの集合を L と書くことにする。 L の部分集合 L' に対して、 L' の元に関する鏡映で生成される $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ の部分群は G の部分群になる事が分かる。

H を G の有限指数部分群とし、自然な射影を $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/H$ と書くことにする。コンパクト部分集合 $C \subset \mathbb{H}^2/H$ に対し、上で述べた性質を満たす G_1 を見つけられれば良い。 H の極限集合 $\Lambda(H)$ の凸包 $C(H)$ を考える。 $C(H)/H$ は \mathbb{H}^2/H 内の最小の凸集合で、コンパクトになる。(後述する高次元への一般化の際には $C(H)/H$ が有限体積という仮定、すなわち H が geometrically finite という仮定が必要になる。) $R > 0$ に対し $Y = \{x \in \mathbb{H}^2 \mid d(x, C(H)) \leq R\}$ とする。 C がコンパクトである事から R を十分大きくとれば C は $p(Y)$ に含まれる。よってはじめから $C = p(Y)$ であると仮定する。このとき C は \mathbb{H}^2/H 内のコンパクトな凸集合であり、 Y は $p^{-1}(C)$ の連結成分となる。

L の元で Y と交わらない物を L_Y と書くことにする。このとき $l \in L_Y$ に対して、 l を境界を持つ \mathbb{H}^2 の半平面のうち Y を含む物を l_+ 、含まない物を l_- と置くことにする。 $\bar{Y} = \bigcap_{l \in L_Y} l_+$ とすると \bar{Y} は Y を含む凸集合で、(一般には無限個の) P のコピーでタイリングされる (Figure 24)。 Y は H に関して不変である事から \bar{Y} も H で不変になり、 $p(\bar{Y}) = \bar{Y}/H$ となる。

ここで \bar{Y} が P でタイリングされていた事から、 $p(\bar{Y})$ も P でタイリングされる事がわかる。実は $p(\bar{Y})$ は有限個の P でタイリングされる事が次のようにして示される。 P^* を Y から十分離れたタイルとする。このとき P^* が \bar{Y} に含まれない事を示せば $p(P^*)$ は $p(\bar{Y})$ に入らないことになる。よって $p(\bar{Y})$ 内のタイルは $p(Y)$ から一定の距離内にあることになるが、そのような物は有限個しかない。 P^* と Y を結ぶ最短測地線を γ とする。このとき γ に垂直で Y の点を含む測地線 h が存在する (Figure 25)。 P^* の角度が $\pi/2$ である事から P^* のある辺 l で γ との角度が $\pi/4$ 以上になる物が必ず存在する。このとき γ の距離が十分長ければ l と h は交わらない。とくに l は Y と交わらないので $l \in L_Y$ であり、 $P^* \subset l_-$ より P^* は \bar{Y} の外側にある (Figure 25)。

\bar{Y} の (一般には無限の) 辺での鏡映で生成される G の部分群を G_2 とする。 G_2 と H で生成される G の部分群を G_1 とする。このとき \mathbb{H}^2/G_1 は $p(\bar{Y})$ と同じ数の P でタイリングされるので面積が有限になる。よって G_1 は G の有限指数部分群。必要ならば C を大きく取り直す事で C は \bar{Y}/H の内部にあると仮定できるので、 $C \subset \bar{Y}/H \rightarrow \bar{Y}/G_1$ は同相になる。 \square

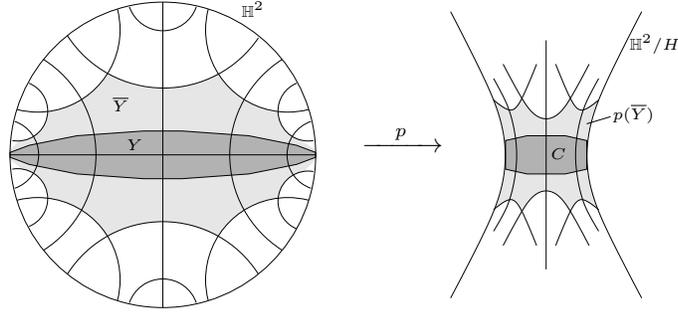
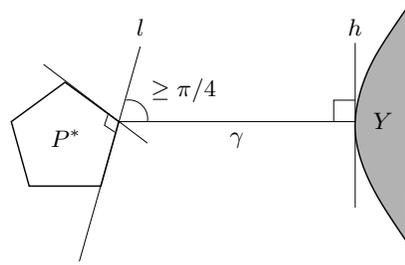


FIGURE 24.

FIGURE 25. l と h は交わらないので, l と Y は交わらない.

P を \mathbb{H}^n 内の面角が直角である多面体であるとする. P がコンパクトであれば, 定理 10.5 の証明は L が超平面に変わったりするだけで平行に進む. ただし convex core $C(H)/H$ がコンパクトであることが必要なので H は geometrically finite である必要がある. 多少の技術的な困難はあるが, P の頂点が無限遠点にある場合にも同様に geometrically finite な部分群の分離性が示される:

定理 10.6 (Agol-Long-Reid [ALR01] Thm 3.1). P を \mathbb{H}^n 内の面角が直角である多面体であるとする. P の面での鏡映で生成される $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ の離散部分群を $G(P)$ とする. $G(P)$ の有限生成部分群 H が geometrically finite ならば H は分離的.

しかしながら十分次元の高い双曲空間内には直角多面体が存在しない事が知られている:

定理 10.7 (Potyagailo-Vinberg [PV05]). $n \leq 14$ のときのみ \mathbb{H}^n 内に直角多面体が存在する.

RACG が双曲空間の鏡映として実現できない場合でも有限生成部分群の分離性が次のような文脈で示される. G を RACG とする. このとき G には生成元が指定されているので, これらに関する Cayley グラフを考える事ができる. G の部分群 H はこの Cayley グラフの部分集合と考える事ができる. ある $K \geq 0$ が存在して, H の任意の 2 点を結ぶ Cayley グラフ内の測地線が H の K -近傍に入る時, H は quasi-convex であるという.

定理 10.8 (Haglund [Hag08]). RACG の有限生成な quasi-convex 部分群は分離的.

最後に, NPC cube complex の基本群の部分群の分離性と special という性質が密接に関連していることについて述べておく:

定理 10.9 (Haglund-Wise [HW08] Thm 1.3, Thm 7.3). X を compact special cube complex とする. $\pi_1(X)$ が word-hyperbolic ならば, $\pi_1(X)$ の quasi-convex 部分群は分離的.

定理 10.10 (Haglund-Wise [HW08] Thm 1.4, Thm 8.13). X を compact NPC cube complex とする. $\pi_1(X)$ が word-hyperbolic ですべての quasi-convex 部分群が分離的ならば X は virtually special.

11. CUBULATION OF CLOSED HYPERBOLIC 3-MANIFOLD GROUPS

まず Bass-Serre 理論から, 有限生成群 G に対して

$$\boxed{G \text{ は融合積か HNN 拡大として書ける } (G \text{ は splittable})} \iff \boxed{G \text{ は simplicial tree に (大域的な) 固定点を持たずに作用する}}$$

が成り立つ. この左側の simplicial tree (CAT($-\infty$) 空間) を CAT(0) cube complex にしたものが Sageev の論文 [Sag95] である.

G を有限生成群とする. $G > H$ に対して次のように (G, H) のエンドの数が定義できる. Γ を G の適当な生成元に関する Cayley graph とする. このとき $H \backslash \Gamma$ のエンドの数を $e(G, H)$ とかく. $e(G, H) > 1$ であると

きペア (G, H) を *multi-ended* という。 G がある部分群に関して *multi-ended* であるとき、 G を *semi-splittable* という。

(G, H) が *multi-ended* であることを、 H が G の中で *codimension-1* であるとも言う。

定理 11.1 (Thm 3.1 [Sag95]). G を有限生成群とする。 G が *CAT(0) cube complex* に本質的に作用することと G が *semi-splittable* であることは同値。

以降この定理を使う事はないのでこれ以上説明しないことにする。 このノートに関係する部分は、 この定理の証明においてペア (G, H) から *CAT(0) cube complex* が構成された事である。

定理 11.2 ([Sag95]). 群 G と *multi-ended subgroup* H に対して、 ある G が作用する *CAT(0) cube complex* が存在する。

加筆予定：構成法の概略

Sageev の構成法をもとに次の定理が示されている。

定理 11.3 (Thm 1.4 [BW09]). G を双曲群とする。 その無限遠境界 $\partial_\infty G$ の 2 点を分離するような部分群 H が存在するならば、 ある *NPC cube complex* で G が固有かつコンパクトに作用するものが存在する。

M が閉 3 次元双曲多様体であるときに $G = \pi_1(M)$ に対して上記の定理を適用するためには次の定理が必要である。

定理 11.4 ([KM12]). $M = \mathbb{H}^3/G$ は閉 3 次元双曲多様体であるとする。 任意の $\epsilon > 0$ に対し、 ある閉 *Riemann* 面 $S_\epsilon = \mathbb{H}^2/F_\epsilon$ と $(1 + \epsilon)$ *quasi-conformal* 写像 $g : \partial\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial\mathbb{H}^3$ で $gF_\epsilon g^{-1}$ が G の *quasi-Fuchs* 部分群となるものが存在する。 とくに G は閉曲面群を部分群に含む。

これらをあわせて次の定理が示される。

定理 11.5 (Thm 5.3 [BW09], [Duf12]). M を閉双曲 3 次元多様体とする。 このとき $\pi_1(M)$ は *CAT(0) cube complex* に *free* かつコンパクトに作用する。

12. WISE の仕事 -QUASICONVEX VIRTUAL HIERARCHY-

12.1. QVH.

定義 12.1 (Def 11.5 [Wis11b]). \mathcal{QVH} は双曲群からなる集合で次の操作で閉じている最小のものである：

- (1) $\{1\} \in \mathcal{QVH}$.
- (2) $A, C \in \mathcal{QVH}$, B は有限生成で A と C の中で *quasi-convex* なら、 $G = A *_B C \in \mathcal{QVH}$.
- (3) $A \in \mathcal{QVH}$, B は有限生成で A の中で *quasi-convex* なら、 $G = A *_B \in \mathcal{QVH}$.
- (4) $H < G$ を有限指数部分群とする。 $H \in \mathcal{QVH}$ なら $G \in \mathcal{QVH}$.

定理 12.2 (Theorem B (Thm 13.10), [Wis11b]). G は *torsion-free* 双曲群とする。 $G \in \mathcal{QVH}$ であることと G が *virtual* に *special cube complex* の基本群である事は同値。

M は閉双曲 3 次元多様体とする。 このとき *geometrically finite* な埋め込み $S \subset M$ があれば Thurston の *hyperbolization* の証明から *geometrically finite surface* により M を切り開いていく事ができる。 よって M が *geometrically finite* な曲面を持つ時、 $\pi_1(M)$ は *virtual* には *special cube complex* の基本群になる。 これから $\pi_1(M)$ は *virtual* には RAAG の部分群になる。 よって $\pi_1(M)$ は *virtually RFRS* であり、 M は *virtually fibered* になる。 *Geometrically infinite* な曲面をもつときには、 その双曲 3 次元多様体は *virtually fibered* である事が知られている。 まとめると次の定理を得る：

定理 12.3. *Closed Haken* 双曲 3 次元多様体は *virtually fibered*.

12.2. カスプのある場合。 定理 12.2 は双曲群に関する定理なので、 これをカスプ付きの 3 次元多様体に適用する事はできない。(階数が 2 以上のアーベル群を部分群にもつ群は双曲群でない。) しかしながらカスプ付き双曲多様体は *relatively hyperbolic group* になっている。 Wise は次の定理も示しているようである。

定理 12.4 (Thm 16.1(16.28) [Wis11b]). G を *torsion-free* かつ *relatively hyperbolic* とする。 G が *graph of group* で頂点が *virtually special compact* な双曲群、 辺が *quasiconvex* 部分群に対応しているならば G は *virtually compact special*.

この定理を適用して次を示している。

定理 12.5 (Thm 14.31 [Wis11b]). M をカスプ付きの有限体積 3 次元双曲多様体とする。 このとき $\pi_1(M)$ は *virtually sparse special*.

“Sparse” の定義を確認していないがこれをもって *cusped hyperbolic 3-manifold* の場合も *virtual fibered* 予想の解決が従うのだと思う。 ただ Wise の論文のなかでは *cusped hyperbolic* の場合について *virtual fibered* 予想が解けた事を明確に書いてるようには見えない。(Closed Haken の場合には [Wis11b, Corollary 14.3] に明確に書いてある.)

13. AGOL の結果

まず論文 [AGM12] の主定理を述べる

定理 13.1 (Thm 1.1 [AGM12]). G を双曲群とする. G が $CAT(0)$ cube complex に固有不連続かつコンパクトに作用する時, 有限指数部分群 $G' < G$ で X/G' が (compact) special cube complex になる物が存在する.

この定理から閉多様体の場合の virtual fibering 予想の解決が従う. §1.4 で一度説明したが再掲する.

定理 1.1 の閉多様体の場合の証明. まず M を閉双曲 3 次元多様体とする. 定理 11.5 により $\pi_1(M)$ は $CAT(0)$ cube complex に固有不連続かつコンパクトに作用する. 定理 13.1 により, $\pi_1(M)$ の有限指数部分群 G' で special cube complex の基本群となる物がとれる. よって系 9.7 により G' は RAAG の部分群となる. RAAG は RACG の有限指数部分群だから (定理 3.7), 定理 4.1 より $\pi_1(M)$ の有限指数部分群で RFRS になる物が存在する. 定理 5.11 により M は virtually fibered になる. \square

次の定理は定理 12.2 の一般化である.

定理 13.2 (Thm A.42, [AGM12]). 双曲群 G が $G \in QVH$ であることと *virtually special* である事は同値.

よって双曲群に関しては QVH の元である事を *virtually special* の定義としてしまってもよい. この定式化に基づき定理 13.1 は示された.

REFERENCES

- [AFW12] Matthias Aschenbrenner, Stefan Friedl, and Henry Wilton, *3-manifold groups*, arXiv:1205.0202 (2012).
- [AGM12] Ian Agol, Daniel Groves, and Jason Manning, *The virtual haken conjecture*, arXiv:1204.2810 (2012).
- [Ago08] Ian Agol, *Criteria for virtual fibering*, J. Topol. **1** (2008), no. 2, 269–284.
- [ALR01] I. Agol, D. D. Long, and A. W. Reid, *The Bianchi groups are separable on geometrically finite subgroups*, Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 3, 599–621.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Brø83] Arne Brøndsted, *An introduction to convex polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 90, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [BRT12] Benjamin A. Burton, J. Hyam Rubinstein, and Stephan Tillmann, *The Weber-Seifert dodecahedral space is non-Haken*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 2, 911–932.
- [BW09] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise, *A boundary criterion for cubulation*, arXiv:0908.3609 (2009).
- [DJ00] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz, *Right-angled Artin groups are commensurable with right-angled Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **153** (2000), no. 3, 229–235.
- [Duf12] G. Dufour, *Cubulations de variétés hyperboliques compactes*, thesis Université Paris Sud (2012).
- [Gab83] David Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 3, 445–503.
- [Gro87] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 75–263.
- [Hag08] Frédéric Haglund, *Finite index subgroups of graph products*, Geom. Dedicata **135** (2008), 167–209.
- [Hat] Allen Hatcher, *Notes on basic 3-manifold topology*.
- [Hem76] John Hempel, *3-Manifolds*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976.
- [HW08] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise, *Special cube complexes*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), no. 5, 1551–1620.
- [HW12] G. Christopher Hruska and Daniel T. Wise, *Finiteness properties of cubulated groups*, arXiv:1209.1074 (2012).
- [Jac80] William Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [JO84] William Jaco and Ulrich Oertel, *An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold*, Topology **23** (1984), no. 2, 195–209.
- [Kap01] Michael Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, vol. 183, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.
- [KM12] Jeremy Kahn and Vladimir Markovic, *Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 3, 1127–1190.
- [Mor84] John W. Morgan, *On Thurston’s uniformization theorem for three-dimensional manifolds*, The Smith conjecture (New York, 1979), Pure Appl. Math., vol. 112, Academic Press, Orlando, FL, 1984, pp. 37–125.
- [Oer84] U. Oertel, *Incompressible branched surfaces*, Invent. Math. **76** (1984), no. 3, 385–410.
- [Oer86] Ulrich Oertel, *Homology branched surfaces: Thurston’s norm on $H_2(M^3)$* , Low-dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 112, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986, pp. 253–272.
- [PV05] Leonid Potyagailo and Ernest Vinberg, *On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), no. 1, 63–73.
- [Sag95] Michah Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), no. 3, 585–617.
- [Sag97] ———, *Codimension-1 subgroups and splittings of groups*, J. Algebra **189** (1997), no. 2, 377–389.
- [Sco78] Peter Scott, *Subgroups of surface groups are almost geometric*, J. London Math. Soc. (2) **17** (1978), no. 3, 555–565.
- [Sco85] ———, *Correction to: “Subgroups of surface groups are almost geometric” [J. London Math. Soc. (2) **17** (1978), no. 3, 555–565; MR0494062 (58 #12996)]*, J. London Math. Soc. (2) **32** (1985), no. 2, 217–220.
- [Thu82] William P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 3, 357–381.
- [Thu86] ———, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), no. 339, i–vi and 99–130.
- [Tis70] D. Tischler, *On fibering certain foliated manifolds over S^1* , Topology **9** (1970), 153–154.
- [Tol93] Jeffrey L. Tollefson, *Normal surfaces minimizing weight in a homology class*, Topology Appl. **50** (1993), no. 1, 63–71.
- [TW96] Jeffrey L. Tollefson and Ningyi Wang, *Taut normal surfaces*, Topology **35** (1996), no. 1, 55–75.
- [Vin71] È. B. Vinberg, *Discrete linear groups generated by reflections*, Math. USSR Izvestija **5** (1971), no. 5, 1083–1119.
- [Wis11a] D. Wise, *From riches to raags: 3-manifolds, right-angled artin groups, and cubical geometry*, lecture notes for the NSF-CBMS conference ‘3-Manifolds, Artin Groups and Cubical Geometry’ (August 1-5, 2011) (2011).
- [Wis11b] ———, *The structure of groups with a quasi-convex hierarchy*, preprint (2011).