# Finding ideal points from an ideal triangulation

蒲谷 祐一　（東工大　理工学研究科数学専攻）

2008年8月8日

# 0. 背景

$N$ : 境界が（1つの）トーラスである compact orientable 3-manifold.
(e.g. knot complement)

$X(N) = \mathrm{Hom}(\pi_1(N), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))/\sim$ : character variety

$X(N)$ の "無限遠点" を *ideal point* という.

$X(N)$のideal point.

$\Rightarrow$

- Incompressible surface とその boundary slope がわかる.
- Culler-Shalen norm が求まる:
  - Cyclic (finite) surgeryについての情報が得られる.

$X(N)$ の ideal point は 3-manifold $N$ の重要な情報を持つ.

$X(N)$ は基本群 $\pi_1(N)$ の表示を用いることにより，ある方程式系の解として記述できる．しかしながらその方程式系は非常に複雑なものになってしまう．さらにその方程式系から ideal point を見つける事は難しい.

動機

Ideal point を多様体の組み合わせ的な情報から直接求めたい.

# 1. The character variety of a 3-manifold

$N$ : a compact 3-manifold

$R(N) = \mathrm{Hom}(\pi_1(N), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))$

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は $R(N)$ に conjugation で作用する. $X(N)$ を $R(N)$ の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 作用による algebraic quotient とする.
( $X(N) = R(N)//\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ )
$X(N)$ を $N$ の *character variety* と呼ぶ.

**Fact 1** $X(N)$ は *affine algebraic set* となり *quotient map* $t : R(N) \to X(N)$ は *regular.* $\gamma \in \pi_1(N)$ に対し, $\mathrm{tr}(\rho(\gamma))$ ($[\rho] \in X(N)$) は $X(N)$ 上の *regular function* になる.

## 2. Ideal points and valuations

$C$ : an affine algebraic curve.

$\widetilde{C}$ : $C$ に双有理同値な projective smooth curve.

$\widetilde{C} - C$ の点を *ideal points* と呼ぶ. 直感的にいうと ideal point とは $C$ の'無限遠点'である.

## Valuations

$\mathbb{C}(C)$ を $C$ の function field とする．$\mathbb{C}(C)$ の (discrete) *valuation* とは写像 $v : \mathbb{C}(C) - \{0\} \to \mathbb{Z}$ で次の条件を満たすものである

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$,
2. $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ for all $x, y \in \mathbb{C}(C)$,

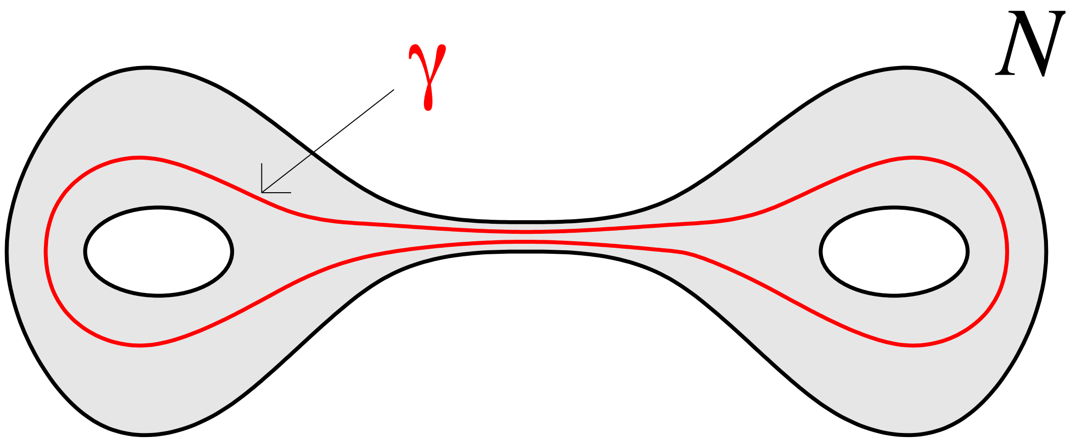
$p$ を $\widetilde{C}$ の点とする． $p$ での局所座標 $t$ をとる． $f \in \mathbb{C}(C)$ は $a \in \mathbb{C}(C), a(p) \neq 0$ を用いて $f = at^n$ と書ける．$p$ に付随する valuation $v$ を $v(f) = n$ で定義できる． このようにして $\widetilde{C}$ の点と $\mathbb{C}(\widetilde{C})$ 上の valuation が 1 対 1 に対応する．

## Geometric meaning of ideal point

$x \in \widetilde{C}$ : an ideal point of $C \subset X(N)$

$[\rho_i] \in C \subset X(N)$ : a sequence of points s.t. $[\rho_i] \to x$

このとき, ある loop $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して $\mathrm{tr}(\rho_i(\gamma))$ は発散する.

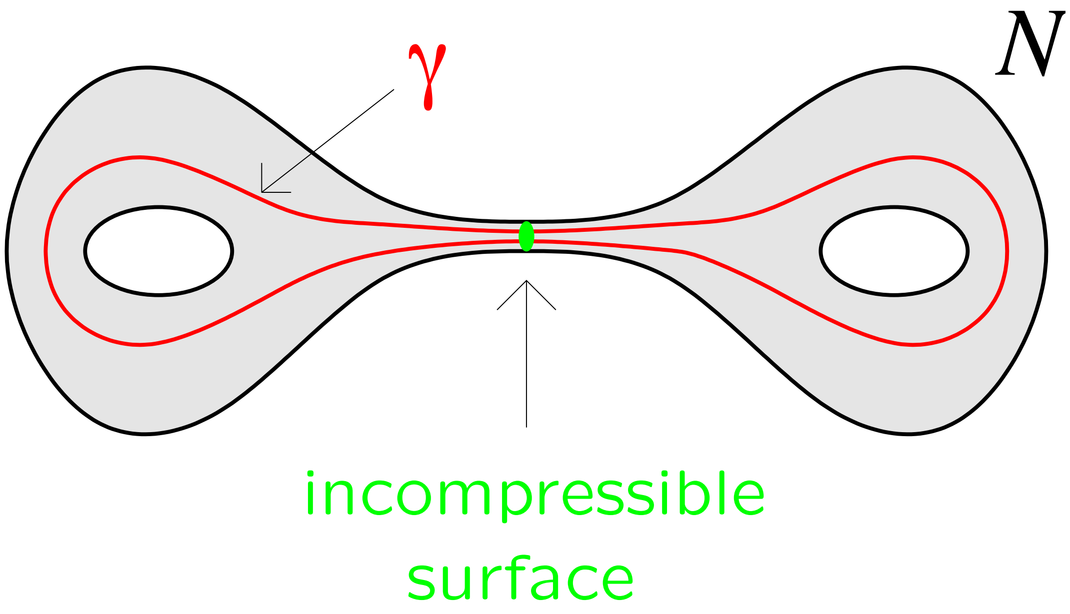


## Geometric meaning of ideal point

$x \in \widetilde{C}$ : an ideal point of $C \subset X(N)$

$[\rho_i] \in C \subset X(N)$ : a sequence of points s.t. $[\rho_i] \to x$

このとき, ある loop $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して $\mathrm{tr}(\rho_i(\gamma))$ は発散する.



## Definition

A properly embedded orientable surface $S \subset N$ is called *incompressible* if $\pi_1(S) \to \pi_1(N)$ is injective. $\partial S \subset \partial N$ is called *boundary slope*.

## Theorem(Culler-Shalen)

For each ideal point of a curve of $X(N)$, we can construct an incompressible surface.

## Known results

- Two-bridge knot complement の場合には Ohtsuki によりすべての ideal point が求められている.
- A-polynomial という２変数多項式が計算されているときには $X(N)$ の ideal point を求める事は簡単である．A-polynomial の Newton polygon の各 face に対応して $X(N)$ の ideal point が存在する事が知られている．しかしながら一般に A-polynomial の計算は非常に難しい.

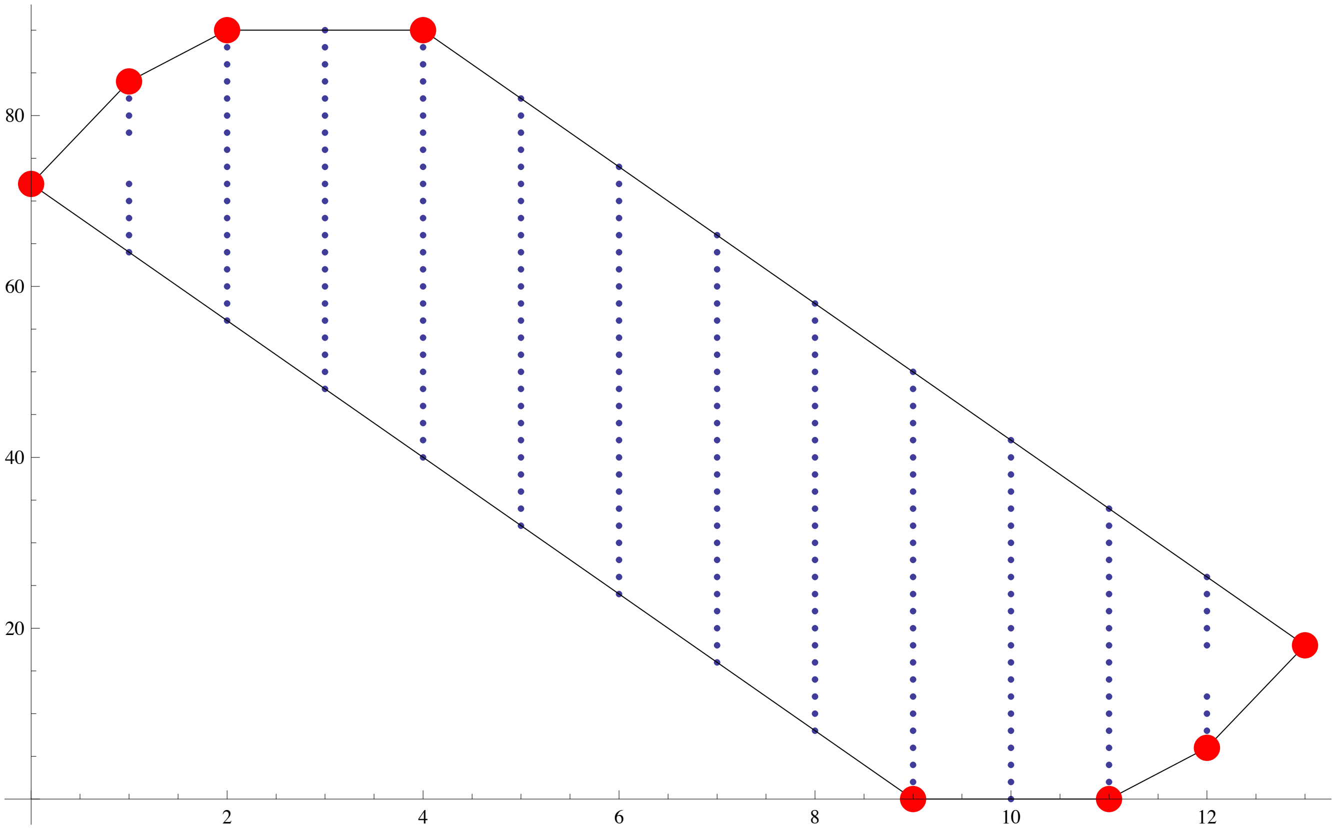
例えば, $10_4$-knot の A-polynomial は,

$$A_{10_4}(L, M) =$$

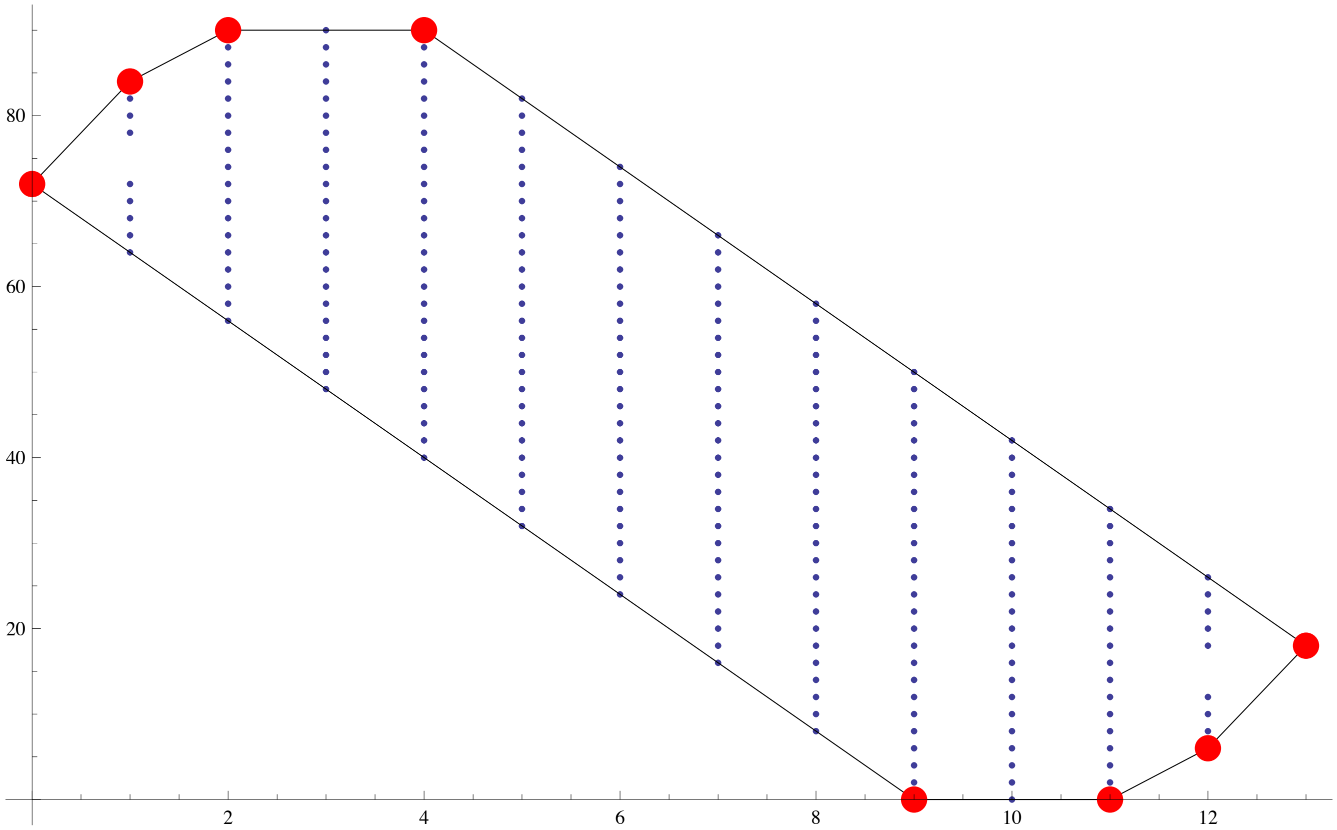
例えば, $10_4$-knot の A-polynomial は,

$$
\begin{aligned}
A_{10_4}(L,M) = {} & M^{72}+L(-9M^{64}+17M^{66}+9M^{68}-8M^{70}+4M^{72}+2M^{78}-3M^{80}+2M^{82}-M^{84})+ \\
& L^2(36M^{56}-126M^{58}+33M^{60}+202M^{62}-75M^{64}-52M^{66}+90M^{68}-37M^{70}+3M^{72}+35M^{74}-30M^{76}- \\
& 10M^{78}+15M^{80}-8M^{82}+3M^{84}-3M^{86}+3M^{88}-M^{90})+L^3(-84M^{48}+406M^{50}-382M^{52}-762M^{54}+ \\
& 1043M^{56}+601M^{58}-941M^{60}+154M^{62}+466M^{64}-215M^{66}+74M^{68}+16M^{70}-153M^{72}+81M^{74}-23M^{76}- \\
& 11M^{78}+26M^{80}-5M^{82}-16M^{84}+19M^{86}-10M^{88}+2M^{90})+L^4(126M^{40}-742M^{42}+1119M^{44}+1145M^{46}- \\
& 3579M^{48}-579M^{50}+4865M^{52}-455M^{54}-3019M^{56}+1125M^{58}+1368M^{60}+83M^{62}-414M^{64}-801M^{66}+ \\
& 338M^{68}+390M^{70}-299M^{72}-70M^{74}+195M^{76}-80M^{78}-13M^{80}+4M^{82}+21M^{84}-19M^{86}+7M^{88}-M^{90})+ \\
& L^5(-126M^{32}+840M^{34}-1650M^{36}-691M^{38}+5456M^{40}-1609M^{42}-9172M^{44}+4253M^{46}+8723M^{48}- \\
& 3703M^{50}-4963M^{52}+2030M^{54}+4235M^{56}+938M^{58}-4105M^{60}-1534M^{62}+3017M^{64}+491M^{66}-1783M^{68}+ \\
& 377M^{70}+569M^{72}-291M^{74}-135M^{76}+177M^{78}-66M^{80}+9M^{82})+L^6(84M^{24}-602M^{26}+1391M^{28}-60M^{30}- \\
& 4273M^{32}+3336M^{34}+7458M^{36}-8485M^{38}-8520M^{40}+9533M^{42}+7490M^{44}-5697M^{46}-5824M^{48}+ \\
& 3647M^{50}+8652M^{52}-2065M^{54}-9238M^{56}+2013M^{58}+6185M^{60}-2615M^{62}-2243M^{64}+1709M^{66}+ \\
& 288M^{68}-678M^{70}+266M^{72}-36M^{74})+L^7(-36M^{16}+266M^{18}-678M^{20}+288M^{22}+1709M^{24}-2243M^{26}- \\
& 2615M^{28}+6185M^{30}+2013M^{32}-9238M^{34}-2065M^{36}+8652M^{38}+3647M^{40}-5824M^{42}-5697M^{44}+ \\
& 7490M^{46}+9533M^{48}-8520M^{50}-8485M^{52}+7458M^{54}+3336M^{56}-4273M^{58}-60M^{60}+1391M^{62}-602M^{64}+ \\
& 84M^{66})+L^8(9M^8-66M^{10}+177M^{12}-135M^{14}-291M^{16}+569M^{18}+377M^{20}-1783M^{22}+491M^{24}+3017M^{26}- \\
& 1534M^{28}-4105M^{30}+938M^{32}+4235M^{34}+2030M^{36}-4963M^{38}-3703M^{40}+8723M^{42}+4253M^{44}-9172M^{46}- \\
& 1609M^{48}+5456M^{50}-691M^{52}-1650M^{54}+840M^{56}-126M^{58})+L^9(-1+7M^2-19M^4+21M^6+4M^8- \\
& 13M^{10}-80M^{12}+195M^{14}-70M^{16}-299M^{18}+390M^{20}+338M^{22}-801M^{24}-414M^{26}+83M^{28}+1368M^{30}+ \\
& 1125M^{32}-3019M^{34}-455M^{36}+4865M^{38}-579M^{40}-3579M^{42}+1145M^{44}+1119M^{46}-742M^{48}+126M^{50})+ \\
& L^{10}(2-10M^2+19M^4-16M^6-5M^8+26M^{10}-11M^{12}-23M^{14}+81M^{16}-153M^{18}+16M^{20}+74M^{22}-215M^{24}+ \\
& 466M^{26}+154M^{28}-941M^{30}+601M^{32}+1043M^{34}-762M^{36}-382M^{38}+406M^{40}-84M^{42})+L^{11}(-1+3M^2- \\
& 3M^4+3M^6-8M^8+15M^{10}-10M^{12}-30M^{14}+35M^{16}+3M^{18}-37M^{20}+90M^{22}-52M^{24}-75M^{26}+202M^{28}+ \\
& 33M^{30}-126M^{32}+36M^{34})+L^{12}(-M^6+2M^8-3M^{10}+2M^{12}+4M^{18}-8M^{20}+9M^{22}+17M^{24}-9M^{26})+L^{13}(M^{18}).
\end{aligned}
$$

## $A_{10_4}$ の Newton polygon は

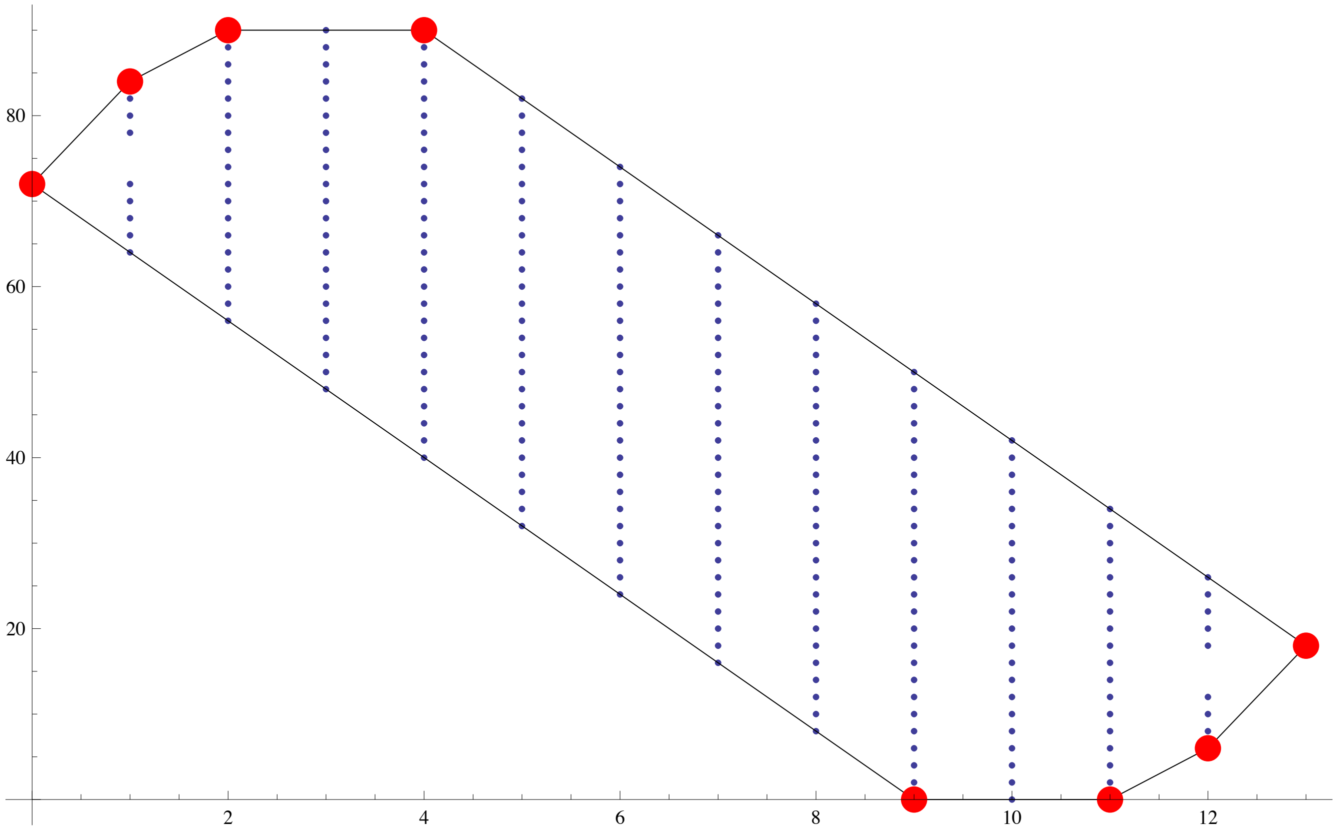


$A_{10_4}$ の Newton polygon は




Boundary slope $-12$, $-6$, $0$, $8$ に対応する ideal point が存在する.

$A_{10_4}$ の Newton polygon は

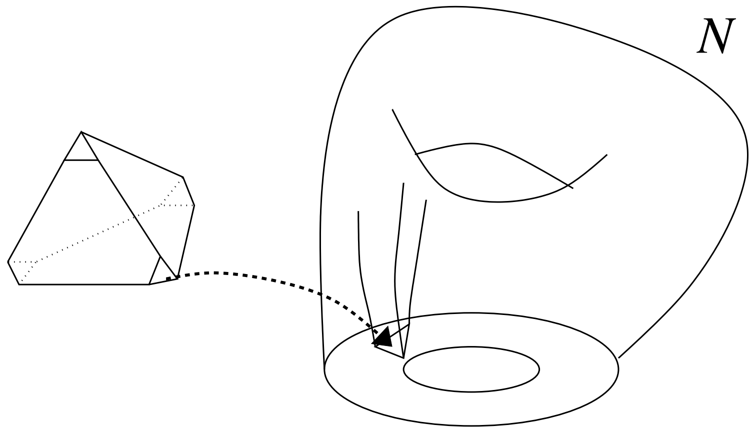



Boundary slope $-12$, $-6$, $0$, $8$ に対応する ideal point が存在する.

$N$ の組み合わせ的な情報からこの polygon を得たい.

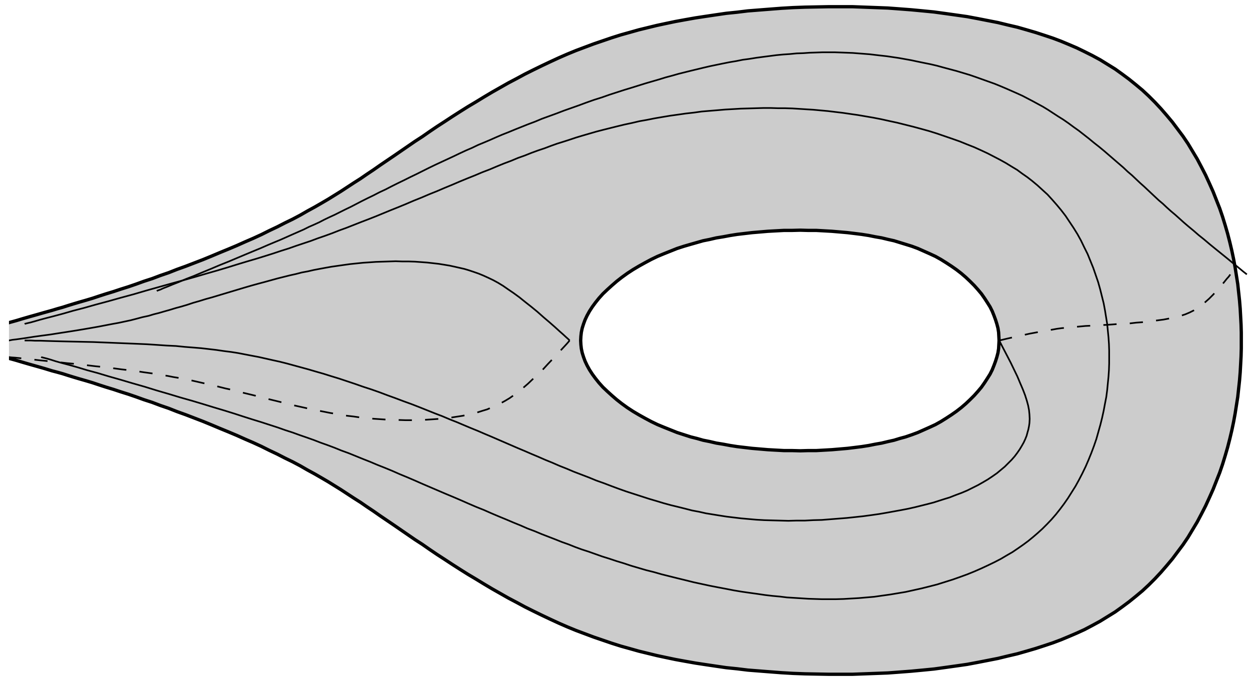
## 3. Ideal triangulation

**Definition 2** $N$ の (*topological*) *ideal triangulation* とは有限個の *3-simplex* を 各面でペアで張り合わせて作られる *cell complex* $K$ で $K - Nbd(K^{(0)})$ が $N$ に同相であるもの.

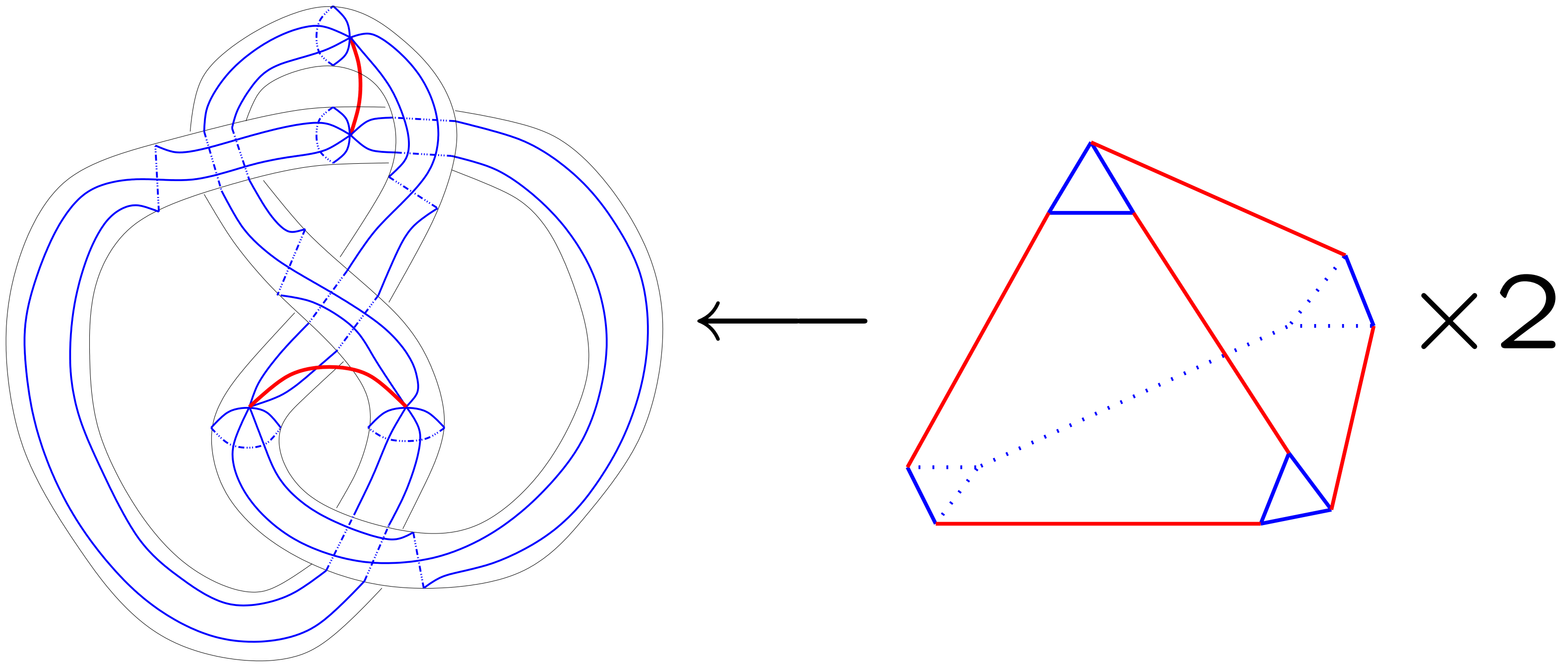



Ideal triangulation とは頂点を切り取った 3-simplex の組み合わせとして $N$ を表す事である.

# 2-dimensional case



# Example: Complement of the figure eight knot

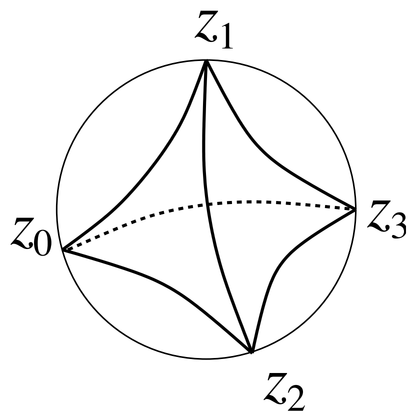


# 4. Complex parameter of ideal tetrahedron

$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) | t > 0\}$ : the upper-half space model of $\mathbb{H}^3$

$\mathbb{H}^3$ の ideal boundary は $\mathbb{C}P^1$ で記述される.

(Geometric) *ideal tetrahedron* とは $\mathbb{C}P^1$ の互いに異なる4点 $(z_0, z_1, z_2, z_3)$ の $\mathbb{H}^3$ の中での convex hull とする.

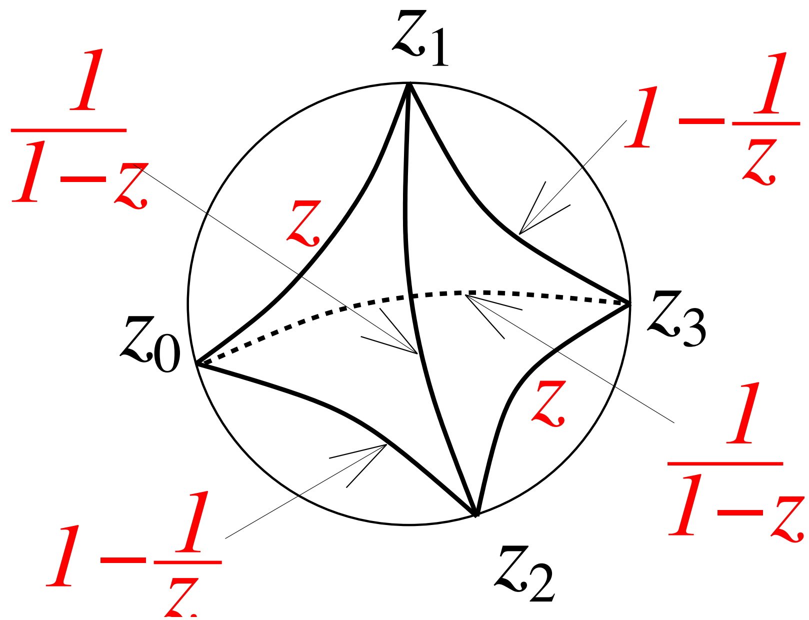



Ideal tetrahedron の形は cross ratio を用いることにより, ある複素数で parametrize される. 辺 $(z_0, z_1)$, $(z_2, z_3)$ に対し, 複素数

$$z = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = \frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_0)}{(z_2 - z_0)(z_3 - z_1)}.$$

を対応させる. ここで $(0, 1, 2, 3)$ は tetrahedron の向きに一致する順でとる. 定義より $z \neq 0, 1, \infty$ となる.

辺 $(z_1, z_2)$, $(z_0, z_3)$ に対しては complex parameter は $\frac{1}{1-z}$ となる.
辺 $(z_1, z_3)$, $(z_0, z_2)$ に対しては complex parameter は $1 - 1/z$ となる.



# 5. Deformation variety $\mathcal{D}(M)$

$K$ : an ideal triangulation of $N$

各 ideal tetrahedron に complex parameter を定めておく．

$K = \Delta(z_1) \cup \cdots \cup \Delta(z_n)$

１つの ideal tetrahedron $\Delta(z_1)$ を $\mathbb{H}^3$ に置く．これを $D(\Delta(z_1))$ とする．次に $\Delta(z_2)$ に（$K$ の中で）隣り合う tetrahedron $\Delta(z_2)$ を $\mathbb{H}^3$ の中で $D(\Delta(z_1))$ と隣り合うように置く．この構成を繰り返すことにより, map $D : \widetilde{K - K^{(1)}} \to \mathbb{H}^3$ が得られる．

$D$ を $D : \widetilde{K - K^{(0)}} \to \mathbb{H}^3$ に拡張するために *gluing equations* を導入する．

$K$ の 1-simplex $e_k$ に対し, $e_k$ に隣接する ideal tetrahedron の辺が存在する．これらの隣接する ideal tetrahedron の complex parameter の積を $R_k$ とする:

$$
\begin{aligned}
R_k &= \prod_{j=1}^{n} (z_j)^{p_{k,j}} \left(\frac{1}{1-z_j}\right)^{p'_{k,j}} \left(1-\frac{1}{z_j}\right)^{p''_{k,j}} \\
&= \prod_{j=1}^{n} (-1)^{p''_{k,j}} (z_j)^{r'_{k,j}} (1-z_j)_{\nu}^{r''_{k,j}} \\
&(r'_{k,j} = p_{k,j} - p''_{k,j}, \quad r''_{k,j} = p''_{k,j} - p'_{k,j}).
\end{aligned}
$$

これらの方程式 $R_k = 1 (k = 1, \ldots, n)$ を *gluing equations* と呼ぶ. $(z_1, \ldots, z_n)$ が gluing equations をみたすとき，上で構成した $D$ は $D : K - K^{(0)} \cong \widetilde{N} \to \mathbb{H}^3$ に拡張する． この map を *developing map* とよぶ.

$\Delta(z_1)$ を $K$ のある ideal tetrahedron とする. $\gamma \in \pi_1(N) \cong \pi_1(K - K^{(0)})$ に対し, $D(\Delta(z_1))$ と $D(\gamma\Delta(z_1))$ は $\mathbb{H}^3$ の中の互いに isometric な ideal tetrahedron である．$\mathbb{C}P^1$ の互いに異なる３点を他の互いに異なる３点に写す $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の元は一意に定まるので, $g(D(\gamma\Delta(z_1))) = D(\Delta(z_1))$ となる $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が一意に定まる.

この map を *holonomy representation* $\pi_1(N) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ とよぶ.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}(N,K)(=\mathcal{D}(N)) \\
=&\{(z_1,\ldots,z_n)\in(\mathbb{C}-\{0,1\})^n \mid R_1(z)=1,\ldots,R_{n-1}(z)=1\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

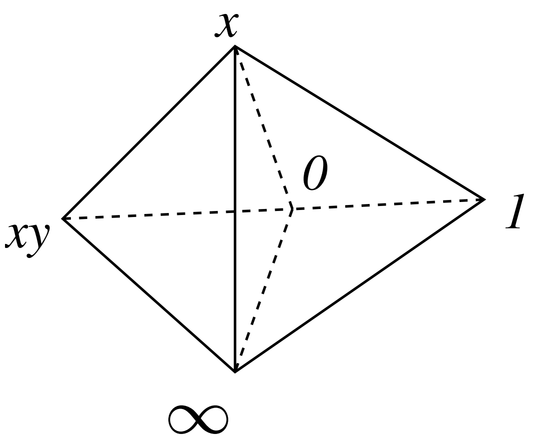
と置く． $\mathcal{D}(N)$ を *deformation variety* と呼ぶことにする． 前述の developing map とその holonomy representation を用いることにより，表現 $\mathcal{D}(N)\to X(N)$ が構成できる．

**Fact** この map $\mathcal{D}(N)\to X(N)$ は algebraic.

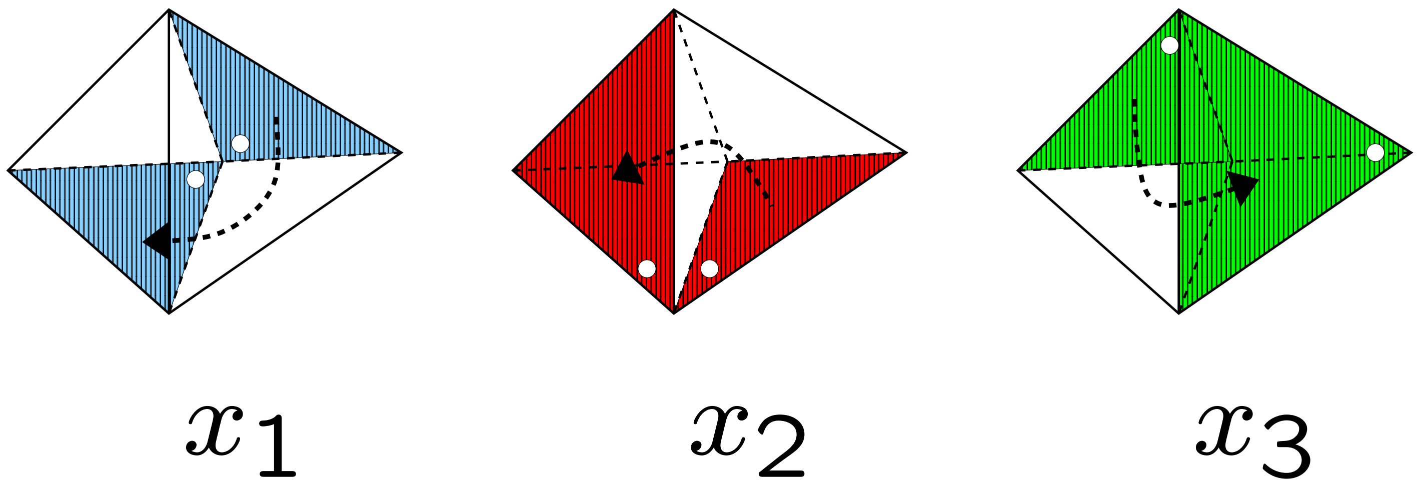
この事実から $\mathcal{D}(N)$ の ideal point を通して $X(N)$ の ideal point を研究する事ができる．

# Example (figure eight knot complement)

$4_1$ knot complement の２つの ideal tetrahedron $\Delta(x)$, $\Delta(y)$ を次のように $\mathbb{H}^3$ に置く:




基本群の生成元は次の face の張り合わせで与えられる:



これらの生成元は次の relation をみたす:

$$\pi_1(S^3 - 4_1) \cong \langle x_1, x_2, x_3 | x_3 x_2 x_3^{-1} x_1^{-1} = 1, x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} = 1 \rangle.$$

対応する表現は次で与えられる:

$$\rho(x_1) = \frac{\pm 1}{\sqrt{y(1-x)}} \begin{pmatrix} -y(1-x) & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\rho(x_2) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x(1-y)}} \begin{pmatrix} x(1-y) & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gluing equation は

$$xy(1-x)(1-y) = 1.$$

## Remark

$\mathcal{D}(N)$ は $(\mathbb{C}-\{0,1\})^n$ の中で $n-1$-個の方程式の解として得られる. よって $\mathcal{D}(N)$ の次元は 1 以上になる. 従って $\mathcal{D}(N)$ は algebraic curve を含む. (Culler-Shalen theory を適用できる.)

境界の torus $\partial N$ で $H_1(\partial N;\mathbb{Z})$ の生成元 $\mathcal{M},\mathcal{L}$ を定める．次の性質をみたす整数の組 $(m_i', m_i'')$ and $(l_i', l_i'')$ が定まる:

$$M = \pm \prod_{j=1}^{n} z_j^{m_j'}(1-z_j)^{m_j''}, \quad L = \pm \prod_{j=1}^{n} z_j^{l_j'}(1-z_j)^{l_j''}.$$

と置くと, $M$ と $L$ はそれぞれ $\rho(\mathcal{M})$ と $\rho(\mathcal{L})$ の固有値の２乗と一致する（$\rho$ は holonomy representation）．$\pi_1(\partial N)$ の可換性により, 適当な conjugation をとって

$$\rho(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} \sqrt{M} & * \\ 0 & \sqrt{M}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} \sqrt{L} & * \\ 0 & \sqrt{L}^{-1} \end{pmatrix}.$$

とできる． $m = (m_1', m_1'' \dots, m_n,' m_n'')$, $l = (l_1', l_1'', \dots, l_n', l_n'')$ と定める.

# Notation

$x = (x'_1, \ldots, x'_n, x''_1, \ldots x''_n), y = (y'_1, \ldots, y'_n, y''_1, \ldots y''_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Wedge 積を

$$x \wedge y = \sum_{j=1}^{n} x'_j y''_j - x''_j y'_j.$$

で定める.

$$r_k = (r'_{k,1}, r''_{k,1}, \ldots, r'_{k,n}, r''_{k,n})$$

とし $[R] = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\langle r_1, \ldots, r_{n-1}\rangle$ とする. $[R]$ の $\wedge$ に関する orthogonal complement を $[R]^{\perp}$ で表す.

# 6. Ideal points of $\mathcal{D}(N)$

$p$ を $\mathcal{D}(N)$ の ideal point とし $v$ を対応する valuation とする．このとき $v$ は次をみたす

$$
\begin{aligned}
0 = v(1) = v(R_k) &= v(\pm \prod_{j=1}^{n} (z_j)^{r'_{k,j}} (1 - z_j)^{r''_{k,j}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left( r'_{k,j} v(z_j) + r''_{k,j} v(1 - z_j) \right) \\
&= (r'_1, r''_1, \ldots, r'_n, r''_n) \wedge (-v(1 - z_1), v(z_1), \ldots, -v(1 - z_n), v(z_n)).
\end{aligned} \tag{2}
$$

この方程式 (2) から

$$
(-v(1 - z_1), v(z_1), \ldots, -v(1 - z_n), v(z_n)) \in [R]^{\perp}
$$

となる．

また $(v(z_j), v(1-z_j))$ は $\mathcal{D}(N)$ の ideal point において次のようにふるまう:

$$(v(z_j), v(1-z_j)) = \begin{cases} (0, c) & \text{if } z_j \to 1 \\ (c, 0) & \text{if } z_j \to 0 \\ (-c, -c) & \text{if } z_j \to \infty. \end{cases}$$

$c$ はある正の整数. 従って $(v(1-z_1), -v(z_1), \ldots, v(1-z_n), -v(z_n))$ は

$$[R]^{\perp} \cap \left\{\mathbb{R}_{\geq 0}(1,0) \cup \mathbb{R}_{\geq 0}(0,-1) \cup \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,1)\right\}^n \tag{3}$$

という集合の中に含まれる.

$I=(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,0,\infty\}^n$ と置き *degeneration index* とよぶ. $I$ は各 ideal tetrahedron $\Delta(z_j)$ の退化の様子を表す（$z_j\to 1,0,\infty$ ）.

$I$ に対し

$$r(I)_{k,j}=\begin{cases} r''_{k,j} & \text{if } i_j=1 \\ r'_{k,j} & \text{if } i_j=0 \\ -r'_{k,j}-r''_{k,j} & \text{if } i_j=\infty \end{cases}$$

とする. $r(I)_{k,j}$ は $j$-番目からの $e_k$ への主要な寄与を記述している.

$I=(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,0,\infty\}^n$ と置き *degeneration index* とよぶ. $I$ は各 ideal tetrahedron $\Delta(z_j)$ の退化の様子を表す（$z_j\to 1,0,\infty$ ）.
$I$ に対し

$$r(I)_{k,j}=\begin{cases} r''_{k,j} & \text{if } i_j=1 \\ r'_{k,j} & \text{if } i_j=0 \\ -r'_{k,j}-r''_{k,j} & \text{if } i_j=\infty \end{cases}$$

とする. $r(I)_{k,j}$ は $j$-番目からの $e_k$ への主要な寄与を記述している.

$$(z_j)^{r'_{k,j}}(1-z_j)^{r''_{k,j}} \qquad z_j\to 1$$

$I=(i_1,\dots,i_n)\in\{1,0,\infty\}^n$ と置き *degeneration index* とよぶ. $I$ は各 ideal tetrahedron $\Delta(z_j)$ の退化の様子を表す（$z_j\to 1,0,\infty$ ）.
$I$ に対し

$$r(I)_{k,j}=\begin{cases} r''_{k,j} & \text{if } i_j=1 \\ r'_{k,j} & \text{if } i_j=0 \\ -r'_{k,j}-r''_{k,j} & \text{if } i_j=\infty \end{cases}$$

とする. $r(I)_{k,j}$ は $j$-番目からの $e_k$ への主要な寄与を記述している.

$$(z_j)^{r'_{k,j}}(1-z_j)^{r''_{k,j}} \qquad z_j\to 0$$

$I = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, 0, \infty\}^n$ と置き *degeneration index* とよぶ. $I$ は各 ideal tetrahedron $\Delta(z_j)$ の退化の様子を表す（$z_j \to 1, 0, \infty$ ）.

$I$ に対し

$$r(I)_{k,j} = \begin{cases} r''_{k,j} & \text{if } i_j = 1 \\ r'_{k,j} & \text{if } i_j = 0 \\ -r'_{k,j} - r''_{k,j} & \text{if } i_j = \infty \end{cases}$$

とする. $r(I)_{k,j}$ は $j$-番目からの $e_k$ への主要な寄与を記述している.

$$(z_j)^{r'_{k,j}}(1 - z_j)^{r''_{k,j}} \quad z_j \to \infty$$

$$R(I)=\begin{pmatrix} r(I)_{1,1} & \dots & r(I)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ r(I)_{n-1,1} & \dots & r(I)_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

とし

$$d(I)_j=(-1)^{j+1}\mathrm{det}\begin{pmatrix} r(I)_{1,1} & \dots & \widehat{r(I)_{1,j}} & \dots & r(I)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r(I)_{n-1,1} & \dots & \widehat{r(I)_{n-1,j}} & \dots & r(I)_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

とする（ hat はその列を除く事を意味する）．次に *degeneration vector* を次で定める.

$$d(I)=(d(I)_1,d(I)_2,\dots,d(I)_n)\in\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n.$$

$\rho_1 = (1, 0)$, $\rho_0 = (0, -1)$ and $\rho_\infty = (-1, 1)$ とおく.

$$S(I) = \{(t_1\rho_{i_1}, \ldots, t_n\rho_{i_n}) | t_j \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$
$$H(I) = \{(t_1\rho_{i_1}, \ldots, t_n\rho_{i_n}) | t_j \in \mathbb{R}, t_j \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

(3) の necessary condition は次に等しい.

$$(v(1 - z_1), -v(z_1), \ldots, v(1 - z_n), -v(z_n)) \in \bigcup_I H(I) \bigcap [R]^\perp.$$

次の事実は線形代数からすぐ分かる.

$$(d(I)_1\rho_{i_1}, d(I)_{i_2}\rho_2, \ldots, d(I)_n\rho_{i_n}) \in [R]^\perp \cap S(I)$$

もし $d(I)$ のすべての係数が非負ならばこのベクトルは necessary condition (3) を満たす.

この necessary condition は次の論文の中で与えられている．

T. Yoshida, *On ideal points of deformation curves of hyperbolic* 3*-manifolds with one cusp*, Topology 30 (1991), no. 2, 155–170.

次の条件は $d(I)$ に対応する ideal point が存在するためのある sufficient condition を与える．

**Theorem 3 (K.)** $I = (i_1, \ldots, i_n)$ を $\{1, 0, \infty\}^n$ の元とする．$d(I)$ のすべての係数が正（すべての係数が負）のとき $d(I)$ に対応する $\mathcal{D}(N)$ の *ideal point* が存在する．対応する *ideal point* の数は $\gcd(d(I)_1, \ldots, d(I)_n)$ に等しい．

# Remark

$v(M)$ と $v(L)$ は次の式で簡単に求まる.

$$|v(M)| = |m \wedge x|, \quad |v(L)| = |l \wedge x|$$

ここで $x = (d'_1\rho_{i_1}, \ldots, d'_n\rho_{i_n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$. 実際

$$v(M) = v(\prod_{j=1}^{n} z_j^{m'_j}(1 - z_j)^{m''_j}) = m \wedge x.$$

もし $m \wedge x$ か $l \wedge x$ nonzero なら $\mathcal{M}$ か $\mathcal{L}$ の character は発散するので $v$ は $X(N)$ の ideal point に対応する. このときさらに $v(M^pL^q) = 0$ なら $\mathcal{M}^p\mathcal{L}^q$ は ideal point に対応した boundary slope に等しい(Cooper-Culler-Gillet-Long-Shalen).

## Idea of the proof

$d(I) > 0$ と仮定する．$c = \mathrm{gcd}(d(I)_1, \dots, d(I)_n)$, $d'(I)_j = d(I)_j / c$ と置く．$\mathcal{D}(N)$ を weighted projective space $\mathbb{C}P(d'_1, \dots, d'_n, -1)$ に埋め込む．具体的に

$$
\begin{aligned}
1 - z_j = a_j t^{d'_j} &\quad \text{if} \quad i_j = 1, \\
z_j = a_j t^{d'_j} &\quad \text{if} \quad i_j = 0, \\
1/z_j = a_j t^{d'_j} &\quad \text{if} \quad i_j = \infty
\end{aligned}
$$

と書ける．$[a_1, \dots, a_n, t] \in \mathbb{C}P(d'_1, \dots, d'_n, -1)$．（ $[a_1, \dots, a_n, t] \sim [z^{d'_1} a_1, \dots, z^{d'_n} a_n, z^{-1} t]$ $z \in \mathbb{C}^*$)

このとき gluing equations $R_k = 1$ は

$$R_k(a_1, \ldots, a_n, t) = \prod_{j=1}^{n} a_j^{r(I)_{k,j}} (1 - a_j t^{d_j})^{\overline{r(I)}_{k,j}} = \pm 1 \quad (k = 1, \ldots n-1) \tag{4}$$

$\mathbb{C}P(d'_1, \ldots, d'_n, -1)$ でと書ける．無限遠で ($t = 0$ で)

$$\prod_{j=1}^{n} a_j^{r(I)_{k,j}} = \pm 1 \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

行列の基本変形を用いて $R(I)$ は upper triangular matrix にできる．結局 $(a_j)^m = 1$ の式に帰着する事が分かる．これらの解が $\mathcal{D}(N)$ の ideal point を与える事が示せる．

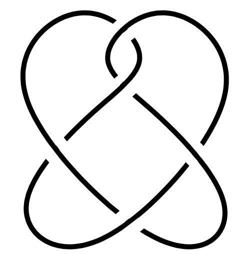
(詳細は arXiv:GT0706.0971 )

# Final remark

主定理によりすべての $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, 0, \infty\}^n$ に対し $d(I)$ を計算し，定理の条件を満たすものを見つければ ideal point の存在がいえる．このような計算は computer を用いれば簡単にできる．特に，少ない ideal tetrahedron で分割できる census manifolds については有効である．

残念ながら，この方法ですべての ideal point が見つかる訳ではない．退化しない ideal tetrahedron が存在する ideal point においては今回の方法は適用できない。例えば ideal point に於いて，PSL$(2, \mathbb{C})$-representation のvolume が non-zero の時には本質的に適用できない．

**7. Example** The complement of the $5_2$ knot.



The degeneration indexes $I$ satisfying the condition of the Theorem are

$$(\infty,\infty,0),(1,0,0),(\infty,1,\infty),(0,0,\infty),(1,1,1),(0,\infty,1)$$

and the corresponding degeneration vectors $d(I)$ are

$$(2,1,1),(1,2,1),(1,1,1),(1,1,1),(2,2,1),$$

respectively. $(v(M),v(L))$ are

$$(0,1),(0,-1),(4,1),(-4,-1),(10,1),(-10,-1).$$

and the corresponding slopes are

$$0,0,-4,-4,-10,-10$$

# Some $(-2, p, q)$-pretzel knots

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| (-2,3,7)- | $(\infty, 1, 0)$ | $(1, 1, 2)$ | $(-1, 16)$ | 16 |
| pretzel | $(\infty, 0, 1)$ | $(1, 2, 1)$ | $(1, -16)$ | 16 |
| (m016) | $(1, 1, \infty)$ | $(1, 2, 2)$ | $(-4, 74)$ | 37/2 |
| | $(1, \infty, 1)$ | $(1, 2, 2)$ | $(4, -74)$ | 37/2 |
| | $(0, \infty, 0)$ | $(1, 1, 1)$ | $(1, -20)$ | 20 |
| | $(0, 0, \infty)$ | $(1, 1, 1)$ | $(-1, 20)$ | 20 |
| (-2,3,13)- | $(1, \infty, \dots)$ | $(1, 5, 1, 1, 3, 7, 7)$ | $(-1, 16)$ | 16 |
| pretzel | $(\infty, 0, \dots)$ | $(8, 7, 4, 6, 2, 8, 1)$ | $(1, -16)$ | 16 |
| (v0959) | $(1, \infty, \dots)$ | $(1, 6, 2, 8, 4, 8, 9)$ | $(-10, 302)$ | 151/5 |
| | $(\infty, \infty, \dots)$ | $(1, 1, 5, 7, 3, 8, 1)$ | $(10, -302)$ | 151/5 |
| (-2,5,5)- | $(0, 1, \dots)$ | $(1, 2, 1, 1, 1, 1, 2)$ | $(-1, 14)$ | 14 |
| pretzel | $(\infty, \infty, \dots)$ | $(2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$ | $(1, -14)$ | 14 |
| (v2642) | $(0, 1, \dots)$ | $(4, 3, 1, 1, 1, 2, 1)$ | $(-2, 30)$ | 15 |
| | $(\infty, 1, \dots)$ | $(4, 1, 3, 4, 2, 6, 1)$ | $(2, -30)$ | 15 |
| | $(\infty, 1, \dots)$ | $(1, 4, 2, 4, 3, 1, 6)$ | $(-2, 30)$ | 15 |
| | $(\infty, \infty, \dots)$ | $(3, 4, 1, 1, 1, 1, 2)$ | $(2, -30)$ | 15 |

# Otter knots (alternating non-Montesinos knots)

- $8_{17}$

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $8_{17}$ | $(0, 1, \infty, \dots)$ | $-(4, 4, 1, 3, 1, \dots)$ | $(-1, -14)$ | $-14$ |
| (12 | $(\infty, \infty, 1, \dots)$ | $(3, 1, 3, 4, 2, \dots)$ | $(1, 14)$ | $-14$ |
| ideal | $(\infty, 0, 0, \dots)$ | $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ | $(1, -2)$ | $2$ |
| tet.) | $(0, 0, \infty, \dots)$ | $(5, 2, 3, 2, 1, \dots)$ | $(-1, 14)$ | $14$ |
| | $(\infty, \infty, 0, \dots)$ | $-(3, 3, 4, 3, 1, \dots)$ | $(1, -14)$ | $14$ |

# Otter knots (alternating non-Montesinos knots)

• $8_{17}$

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $8_{17}$ | $(0, 1, \infty, \ldots)$ | $-(4, 4, 1, 3, 1, \ldots)$ | $(-1, -14)$ | $-14$ |
| (12 | $(\infty, \infty, 1, \ldots)$ | $(3, 1, 3, 4, 2, \ldots)$ | $(1, 14)$ | $-14$ |
| ideal | $(\infty, 0, 0, \ldots)$ | $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ | $(1, -2)$ | 2 |
| tet.) | $(0, 0, \infty, \ldots)$ | $(5, 2, 3, 2, 1, \ldots)$ | $(-1, 14)$ | 14 |
| | $(\infty, \infty, 0, \ldots)$ | $-(3, 3, 4, 3, 1, \ldots)$ | $(1, -14)$ | 14 |

## Fact

• The *diameter* of the boundary slope set $diam(K)$ is defined as the maximum distance between boundary slopes. Let $cr(K)$ be the crossing number of $K$. For alternating non-Montesinos knot, we have

$$diam(K) = 2cr(K). \quad \text{(Ichihara-Mizushima)}$$

- $10_{79}, 10_{80}$

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $10_{79}$ | $(0, 1, 1, \dots)$ | $(2, 3, 3, \dots)$ | $(-3, -10)$ | $-10/3$ |
| (14 | $(\infty, 0, \infty, \dots)$ | $-(2, 1, 1, \dots)$ | $(1, 0)$ | 0 |
| ideal | $(0, \infty, 1, 1, \dots)$ | $(1, 1, 1, \dots)$ | $(1, 0)$ | 0 |
| tet.) | $(0, 1, \infty, \dots)$ | $-(1, 1, 2, \dots)$ | $(-3, 10)$ | $10/3$ |
| | $(\infty, \infty, \infty, \dots)$ | $(2, 1, 2, \dots)$ | $(1, -6)$ | 6 |
| $10_{80}$ | $(0, 0, 0, \dots)$ | $-(1, 3, 1, \dots)$ | $(-2, -26)$ | $-13$ |
| (14 | $(0, \infty, 0, \dots)$ | $(1, 1, 1, \dots)$ | $(1, 8)$ | $-8$ |
| ideal | $(1, 1, 0, \dots)$ | $(1, 4, 2, \dots)$ | $(3, 20)$ | $-20/3$ |
| tet.) | $(\infty, 0, \infty, \dots)$ | $-(2, 3, 2, \dots)$ | $(-3, -20)$ | $-20/3$ |
| | $(1, \infty, 0, \dots)$ | $(1, 2, 1, \dots)$ | $(-1, -2)$ | $-2$ |
| | $(0, \infty, \infty, \dots)$ | $-(1, 1, 2, \dots)$ | $(1, 2)$ | $-2$ |

- $10_{79}, 10_{80}$

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $10_{79}$ | $(0,1,1,\dots)$ | $(2,3,3,\dots)$ | $(-3,-10)$ | $-10/3$ |
| (14 | $(\infty,0,\infty,\dots)$ | $-(2,1,1,\dots)$ | $(1,0)$ | 0 |
| ideal | $(0,\infty,1,1,\dots)$ | $(1,1,1,\dots)$ | $(1,0)$ | 0 |
| tet.) | $(0,1,\infty,\dots)$ | $-(1,1,2,\dots)$ | $(-3,10)$ | $10/3$ |
| | $(\infty,\infty,\infty,\dots)$ | $(2,1,2,\dots)$ | $(1,-6)$ | 6 |
| $10_{80}$ | $(0,0,0,\dots)$ | $-(1,3,1,\dots)$ | $(-2,-26)$ | $-13$ |
| (14 | $(0,\infty,0,\dots)$ | $(1,1,1,\dots)$ | $(1,8)$ | $-8$ |
| ideal | $(1,1,0,\dots)$ | $(1,4,2,\dots)$ | $(3,20)$ | $-20/3$ |
| tet.) | $(\infty,0,\infty,\dots)$ | $-(2,3,2,\dots)$ | $(-3,-20)$ | $-20/3$ |
| | $(1,\infty,0,\dots)$ | $(1,2,1,\dots)$ | $(-1,-2)$ | $-2$ |
| | $(0,\infty,\infty,\dots)$ | $-(1,1,2,\dots)$ | $(1,2)$ | $-2$ |

## Fact

- It is known that all alternating Montesinos knots have only even boundary slopes.

# More examples...

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $8_{16}$ | $(\infty,1,1,1,\infty,\infty,0,0,1,\infty,0)$ | $-(1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ | $(-1,2)$ | 2 |
| | $(1,\infty,\infty,0,\infty,\infty,1,0,0,1,1)$ | $(1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1)$ | $(1,-2)$ | 2 |
| | $(1,\infty,1,\infty,\infty,0,\infty,0,0,0,\infty)$ | $(2,2,1,2,1,1,2,1,1,1,1)$ | $(1,-6)$ | 6 |
| | $(1,0,1,1,0,\infty,0,0,\infty,0,\infty)$ | $-(1,2,2,2,1,1,1,1,2,1,1)$ | $(-1,6)$ | 6 |
| | $(1,\infty,1,\infty,0,\infty,1,0,0,0,\infty)$ | $(3,4,2,4,1,4,1,1,2,1,3)$ | $(1,-16)$ | 16 |
| | $(1,0,1,1,\infty,0,0,0,1,0,\infty)$ | $-(2,4,3,4,4,1,2,1,1,3,1)$ | $(-1,16)$ | 16 |
| $8_{17}$ | $(0,1,\infty,\infty,\infty,0,0,\infty,1,\infty,\infty,1)$ | $-(4,4,1,3,1,2,2,3,1,3,1,2)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(\infty,\infty,1,0,0,\infty,\infty,1,\infty,0,1,\infty)$ | $(3,1,3,4,2,1,2,1,2,1,1,1)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(\infty,0,0,0,\infty,1,0,0,0,\infty,0,1)$ | $(1,1,1,1,1,1,1,3,1,1,2,1)$ | $(1,-2)$ | 2 |
| | $(0,0,\infty,0,0,1,\infty,1,1,\infty,0,0)$ | $(5,2,3,2,1,3,4,2,4,3,1,3)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| | $(\infty,\infty,0,\infty,1,\infty,0,0,0,0,\infty,1)$ | $-(3,3,4,3,1,1,2,1,2,4,2,1)$ | $(1,-14)$ | 14 |
| $8_{18}$ | $(\infty,\infty,\infty,1,\infty,1,\infty,\infty,0,\infty,0,0,0)$ | $(3,2,3,1,4,3,1,1,1,3,2,1,1)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(0,0,1,1,1,\infty,\infty,0,0,1,\infty,0,0)$ | $-(2,3,2,1,1,3,1,4,1,3,3,1,1)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(0,1,0,\infty,1,\infty,1,0,\infty,\infty,0,\infty,0)$ | $-(1,1,4,2,3,1,1,3,2,2,2,6,3)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(0,1,1,1,1,\infty,0,1,\infty,0,\infty,\infty,0)$ | $-(1,1,2,4,1,3,3,1,1,2,2,3,1)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(0,0,\infty,1,1,0,1,0,\infty,\infty,1,\infty,1)$ | $-(1,1,2,2,2,1,2,4,3,2,3,1,2)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(\infty,\infty,0,0,0,0,0,\infty,0,\infty,0,0,\infty)$ | $(2,2,1,1,1,2,3,1,4,3,1,1,3)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(0,1,0,0,\infty,\infty,1,\infty,1,\infty,0,0,\infty)$ | $(2,4,1,2,3,2,1,3,2,1,1,3,6)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(1,0,\infty,0,\infty,\infty,1,\infty,0,0,0,1,\infty)$ | $(3,2,1,3,4,2,2,2,2,1,1,2,1)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(0,0,\infty,\infty,1,0,\infty,0,\infty,1,\infty,0,1)$ | $-(2,2,2,1,3,3,4,1,1,1,1,3,1)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| | $(\infty,0,\infty,0,\infty,1,\infty,\infty,1,0,0,1,0)$ | $(1,2,2,1,1,1,4,3,1,3,2,1,3)$ | $(1,-14)$ | 14 |
| | $(\infty,\infty,0,\infty,0,1,0,0,0,\infty,0,1,0)$ | $(6,2,2,1,1,2,1,1,1,2,2,1,3)$ | $(1,-14)$ | 14 |
| | $(1,1,0,0,\infty,\infty,1,\infty,1,0,\infty,1,0)$ | $(1,2,4,3,2,3,3,3,3,1,1,2,1)$ | $(1,-14)$ | 14 |
| | $(1,1,0,\infty,1,0,0,1,\infty,0,0,\infty,0)$ | $-(1,1,1,2,2,1,1,3,3,2,2,4,1)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| | $(\infty,1,0,\infty,1,0,1,0,\infty,\infty,1,0,1)$ | $-(1,4,2,3,3,1,3,2,3,3,1,1,2)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| | $(0,1,1,1,\infty,\infty,0,1,1,1,\infty,0,1)$ | $-(2,2,2,1,1,2,1,1,1,2,6,3,1)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| | $(0,1,0,0,0,0,0,\infty,1,0,1,0,\infty)$ | $(2,1,1,3,3,2,1,2,2,1,1,1,4)$ | $(1,-14)$ | 14 |

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $10_{79}$ | $(0,1,1,1,0,\infty,0,1,\infty,\dots)$ | $(2,3,3,3,2,2,1,2,1,4,1,4,3,5)$ | $(-3,-10)$ | $-10/3$ |
| | $(\infty,0,\infty,1,\infty,\infty,\infty,\dots)$ | $-(2,1,1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,1,1)$ | $(1,0)$ | 0 |
| | $(0,\infty,1,1,\infty,0,1,\infty,\dots)$ | $(1,1,1,1,2,2,1,1,2,1,1,1,1,2)$ | $(1,0)$ | 0 |
| | $(0,1,\infty,\infty,\infty,1,0,\dots)$ | $-(1,1,2,1,2,5,3,5,2,2,2,1,1,2)$ | $(-3,10)$ | $10/3$ |
| | $(\infty,\infty,\infty,1,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(2,1,2,1,2,1,1,2,1,3,3,1,1,2)$ | $(1,-6)$ | 6 |
| $10_{80}$ | $(0,0,0,1,1,0,1,\dots)$ | $-(1,3,1,3,5,1,3,1,2,1,2,3,2,1)$ | $(-2,-26)$ | $-13$ |
| | $(0,\infty,0,\infty,\infty,\infty,0,1,\dots)$ | $(1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1)$ | $(1,8)$ | $-8$ |
| | $(1,1,0,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(1,4,2,3,5,3,8,4,2,3,1,2,3,1)$ | $(3,20)$ | $-20/3$ |
| | $(\infty,0,\infty,1,1,\infty,1,1,\dots)$ | $-(2,3,2,3,6,1,9,1,3,4,1,5,5,2)$ | $(-3,-20)$ | $-20/3$ |
| | $(1,\infty,0,0,1,1,1,\dots)$ | $(1,2,1,2,1,1,2,3,1,3,1,1,1,1)$ | $(-1,-2)$ | $-2$ |
| | $(0,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $-(1,1,2,1,1,2,1,2,1,4,1,2,1,1)$ | $(1,2)$ | $-2$ |
| $10_{82}$ | $(0,\infty,\infty,0,1,0,0,\dots)$ | $-(7,3,5,1,1,5,2,1,1,7,3,3,2)$ | $(-2,-26)$ | $-13$ |
| | $(1,0,0,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(1,5,1,2,2,3,2,1,1,3,7,2,3)$ | $(2,26)$ | $-13$ |
| | $(0,0,0,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(1,3,1,1,1,2,2,1,1,2,6,1,2)$ | $(1,12)$ | $-12$ |
| | $(0,\infty,\infty,\infty,1,0,0,\dots)$ | $-(4,2,3,1,1,3,2,1,1,6,2,2,1)$ | $(-1,-12)$ | $-12$ |
| | $(0,0,\infty,1,1,\infty,0,\dots)$ | $-(4,2,2,1,1,1,2,1,1,1,5,1,1)$ | $(1,-2)$ | 2 |
| | $(\infty,1,1,\infty,0,0,0,\dots)$ | $(1,1,1,4,1,1,2,1,1,5,1,1,1)$ | $(-1,2)$ | 2 |
| | $(1,1,\infty,\infty,1,\infty,1,\dots)$ | $-(1,4,1,3,2,3,2,1,1,3,3,3,2)$ | $(-1,6)$ | 6 |
| | $(0,\infty,0,1,1,1,0,\dots)$ | $-(3,2,1,2,2,1,2,1,1,1,3,1,1)$ | $(1,-6)$ | 6 |
| | $(0,\infty,1,1,0,0,0,\dots)$ | $(4,1,2,5,1,2,2,1,1,3,4,2,3)$ | $(1,-14)$ | 14 |
| | $(1,1,\infty,\infty,1,\infty,0,\dots)$ | $-(1,4,1,7,2,3,2,1,1,7,3,3,2)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| $10_{85}$ | $(0,\infty,0,\infty,\infty,0,0,\dots)$ | $-(6,2,2,2,8,4,6,10,2,6,6,2,4)$ | $(-2,-40)$ | $-20$ |
| | $(1,0,1,0,\infty,\infty,1,\dots)$ | $(3,2,1,4,2,2,1,1,1,3,1,5,1)$ | $(2,30)$ | $-15$ |
| | $(1,0,1,0,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(2,2,1,3,2,1,1,2,1,2,2,3,1)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(1,0,1,\infty,0,\infty,0,\dots)$ | $-(1,2,1,1,1,1,4,3,1,1,3,1,2)$ | $(1,2)$ | $-2$ |
| $10_{90}$ | $(0,1,1,0,0,\infty,1,\dots)$ | $-(2,1,1,5,2,3,2,4,2,1,1,1,2,1,3)$ | $(-2,-14)$ | $-7$ |
| | $(0,\infty,\infty,\infty,\infty,0,1,\dots)$ | $(1,4,1,3,6,2,1,3,1,1,1,2,1,1,7)$ | $(1,-12)$ | 12 |
| | $(0,1,1,\infty,0,0,1,\dots)$ | $-(3,2,1,3,1,2,1,1,1,1,1,6,6,6,1)$ | $(-1,12)$ | 12 |
| | $(0,1,1,\infty,0,0,1,\dots)$ | $(3,2,1,3,1,2,1,1,1,1,2,6,7,5,1)$ | $(-1,18)$ | 18 |
| | $(0,\infty,\infty,\infty,\infty,0,1,\dots)$ | $-(1,4,1,3,6,2,1,3,1,2,2,1,1,1,10)$ | $(1,-18)$ | 18 |

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $10_{91}$ | $(0,\infty,\infty,1,0,0,\infty,\dots)$ | $(1,5,3,1,1,4,11,4,7,1,1,3,6,2,5)$ | $(-1,-26)$ | $-26$ |
| | $(1,1,1,0,\infty,0,0,\dots)$ | $-(4,8,5,3,2,5,1,3,6,14,1,3,8,4,1)$ | $(1,26)$ | $-26$ |
| | $(\infty,\infty,\infty,0,\infty,0,1,\dots)$ | $(1,2,1,1,1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,1)$ | $(-1,2)$ | 2 |
| | $(1,1,1,0,\infty,0,\infty,\dots)$ | $(1,3,2,2,2,1,3,1,1,1,1,1,1,1,1)$ | $(-1,6)$ | 6 |
| | $(1,0,1,0,0,0,0,\dots)$ | $-(2,2,3,1,4,1,1,1,2,1,2,1,1,1,1)$ | $(1,-6)$ | 6 |
| | $(1,0,1,0,0,0,0,\dots)$ | $(3,4,2,2,3,1,2,1,1,1,1,6,4,1,2)$ | $(1,-10)$ | 10 |
| | $(1,0,1,0,0,0,0,\dots)$ | $-(3,4,5,2,6,1,2,1,2,1,1,5,4,1,3)$ | $(1,-16)$ | 16 |
| $10_{93}$ | $(1,0,\infty,\infty,\infty,1,1,\dots)$ | $(2,1,3,1,1,2,1,1,1,1,2,1,1,1)$ | $(-1,2)$ | 2 |
| $10_{94}$ | $(\infty,1,0,\infty,1,0,0,\dots)$ | $-(2,1,2,4,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1)$ | $(1,-6)$ | 6 |
| | $(\infty,1,0,1,\infty,0,0,\dots)$ | $(3,9,2,1,10,5,3,4,1,8,1,3,5,4)$ | $(-1,28)$ | 28 |
| $10_{98}$ | $(0,\infty,1,0,\infty,1,0,1,\dots)$ | $(2,1,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,2,1,1)$ | $(1,4)$ | $-4$ |
| $10_{100}$ | $(\infty,0,0,1,1,\infty,0,\dots)$ | $(2,1,1,1,1,2,4,1,1,2,1,1,1,1)$ | $(-1,-12)$ | $-12$ |
| | $(\infty,0,0,\infty,1,0,1,\dots)$ | $-(2,1,1,1,1,1,1,2,1,1,2,1,4,1)$ | $(1,12)$ | $-12$ |
| | $(\infty,0,0,0,1,\infty,0,\dots)$ | $-(2,1,1,1,2,2,4,1,1,1,2,2,1,4)$ | $(-1,-6)$ | $-6$ |
| | $(\infty,0,0,\infty,0,0,1,\dots)$ | $(2,1,1,4,2,1,1,2,1,2,1,2,4,1)$ | $(1,6)$ | $-6$ |
| $10_{102}$ | $(\infty,1,\infty,1,0,\infty,\infty,\dots)$ | $(1,2,2,2,1,1,3,1,1,2,4,3,5,1,1)$ | $(-2,-2)$ | $-1$ |
| | $(0,\infty,\infty,1,1,0,0,\dots)$ | $-(4,1,3,1,3,1,6,1,1,2,1,3,6,1,1)$ | $(1,-12)$ | 12 |
| | $(\infty,0,1,1,1,0,\dots)$ | $(1,4,1,1,3,3,1,1,6,2,1,1,4,1,3)$ | $(-1,12)$ | 12 |
| | $(0,\infty,\infty,1,1,0,\dots)$ | $(3,1,3,1,3,1,9,2,1,2,1,3,6,1,1)$ | $(1,-18)$ | 18 |
| | $(\infty,0,1,1,1,0,\infty,\dots)$ | $-(1,4,1,1,3,3,1,1,5,2,1,1,4,2,6)$ | $(-1,18)$ | 18 |
| $10_{103}$ | $(\infty,1,\infty,1,0,\infty,0,\dots)$ | $-(3,1,4,4,2,1,1,4,4,3,2,1,1,3,2)$ | $(-1,-20)$ | $-20$ |
| | $(0,\infty,0,0,\infty,1,0,\dots)$ | $(2,2,2,3,1,1,3,4,4,2,1,2,1,1,3)$ | $(1,20)$ | $-20$ |
| | $(\infty,1,\infty,1,\infty,1,0,\dots)$ | $(2,1,2,4,1,1,1,4,4,3,2,1,1,3,2)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(0,\infty,\infty,0,1,1,0,\dots)$ | $-(2,2,1,1,1,2,3,4,4,2,1,2,1,1,3)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(\infty,1,\infty,1,0,\infty,0,\dots)$ | $(1,1,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1)$ | $(-1,-12)$ | $-12$ |
| | $(\infty,1,\infty,1,0,\infty,\infty\dots,$ | $-(2,1,2,2,2,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1)$ | $(-1,-6)$ | $-6$ |
| | $(0,1,0,\infty,\infty,0,0,\dots)$ | $(1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,3,1,1,1,2)$ | $(1,6)$ | $-6$ |
| $10_{104}$ | $(0,1,0,0,1,1,0,\dots)$ | $-(1,2,1,3,1,2,1,1,1,2,3,1,1,1,1)$ | $(-1,6)$ | 6 |
| | $(\infty,\infty,1,\infty,0,\infty,0,\dots)$ | $-(1,1,2,1,1,3,2,1,6,1,1,1,3,5,3)$ | $(1,-10)$ | 10 |
| | $(\infty,0,0,0,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(1,2,1,3,1,1,2,1,1,1,6,3,3,4,1)$ | $(-1,10)$ | 10 |
| | $(\infty,1,0,0,1,\infty,0,\dots)$ | $(2,3,1,5,1,1,2,3,1,2,2,1,1,1,2)$ | $(-1,14)$ | 14 |
| | $(\infty,0,0,0,1,\infty,0,\dots)$ | $-(1,2,1,2,1,1,2,1,1,2,9,3,3,5,1)$ | $(-1,16)$ | 16 |
| | $(\infty,\infty,1,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(1,1,5,1,2,3,2,1,5,1,1,1,3,6,3)$ | $(1,-16)$ | 16 |

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $10_{106}$ | $(0,1,1,\infty,0,\infty,1,\dots)$ | $-(1,2,1,3,2,1,2,1,4,1,3,1,3,3,1)$ | $(1,14)$ | $-14$ |
| | $(1,1,0,0,1,\infty,0,\dots)$ | $(8,2,2,1,6,1,7,3,1,3,1,1,2,4,2)$ | $(-1,-14)$ | $-14$ |
| | $(1,1,\infty,0,1,1,0,\dots)$ | $-(5,2,1,1,5,1,4,3,1,3,1,1,2,4,2)$ | $(-1,-8)$ | $-8$ |
| | $(1,\infty,0,0,1,\infty,0,\dots)$ | $-(2,1,2,1,3,1,2,1,1,1,1,2,1,1,1)$ | $(-1,-6)$ | $-6$ |
| | $(1,0,0,0,1,\infty,\infty,\dots)$ | $(3,3,2,1,3,1,2,3,3,3,2,5,5,1,3)$ | $(-3,-4)$ | $-4/3$ |
| | $(\infty,1,0,0,\infty,\infty,0,\dots)$ | $-(4,3,4,1,2,1,4,12,2,1,2,4,3,3,3)$ | $(3,4)$ | $-4/3$ |
| | $(1,\infty,0,0,0,\infty,0,\dots)$ | $(1,1,1,1,1,1,2,1,2,2,2,1,1,2,1)$ | $(-1,6)$ | $6$ |
| | $(1,\infty,0,0,1,\infty,0,\dots)$ | $(1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,1,2,1,1,2)$ | $(-1,6)$ | $6$ |
| $10_{108}$ | $(0,\infty,0,\infty,0,0,\infty,\dots)$ | $(3,1,1,2,1,3,1,1,1,3,2,2,1,1)$ | $(1,2)$ | $-2$ |
| | $(0,0,1,\infty,1,1,\infty,\dots)$ | $(1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,3,1,1,2)$ | $(-1,0)$ | $0$ |
| | $(\infty,\infty,\infty,\infty,\infty,0,\dots)$ | $(1,1,2,1,1,3,2,1,1,1,5,1,2,2)$ | $(2,-22)$ | $11$ |
| | $(1,\infty,0,\infty,1,0,1,\dots)$ | $-(3,1,6,2,1,1,1,2,1,2,2,2,2,1)$ | $(-2,22)$ | $11$ |

| knot | $I$ | $d(I)$ | $(v(M), v(L))$ | boundary slope |
|---|---|---|---|---|
| $10_{106}$ | $(0, 1, 1, \infty, 0, \infty, 1, \ldots)$ | $-(1, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 1, 3, 1, 3, 3, 1)$ | $(1, 14)$ | $-14$ |
| | $(1, 1, 0, 0, 1, \infty, 0, \ldots)$ | $(8, 2, 2, 1, 6, 1, 7, 3, 1, 3, 1, 1, 2, 4, 2)$ | $(-1, -14)$ | $-14$ |
| | $(1, 1, \infty, 0, 1, 1, 0, \ldots)$ | $-(5, 2, 1, 1, 5, 1, 4, 3, 1, 3, 1, 1, 2, 4, 2)$ | $(-1, -8)$ | $-8$ |
| | $(1, \infty, 0, 0, 1, \infty, 0, \ldots)$ | $-(2, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$ | $(-1, -6)$ | $-6$ |
| | $(1, 0, 0, 0, 1, \infty, \infty, \ldots)$ | $(3, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 5, 5, 1, 3)$ | $(-3, -4)$ | $-4/3$ |
| | $(\infty, 1, 0, 0, \infty, \infty, 0, \ldots)$ | $-(4, 3, 4, 1, 2, 1, 4, 12, 2, 1, 2, 4, 3, 3, 3)$ | $(3, 4)$ | $-4/3$ |
| | $(1, \infty, 0, 0, 0, \infty, 0, \ldots)$ | $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1)$ | $(-1, 6)$ | $6$ |
| | $(1, \infty, 0, 0, 1, \infty, 0, \ldots)$ | $(1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2)$ | $(-1, 6)$ | $6$ |
| $10_{108}$ | $(0, \infty, 0, \infty, 0, 0, \infty, \ldots)$ | $(3, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1)$ | $(1, 2)$ | $-2$ |
| | $(0, 0, 1, \infty, 1, 1, \infty, \ldots)$ | $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2)$ | $(-1, 0)$ | $0$ |
| | $(\infty, \infty, \infty, \infty, \infty, 0, \ldots)$ | $(1, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 2)$ | $(2, -22)$ | $11$ |
| | $(1, \infty, 0, \infty, 1, 0, 1, \ldots)$ | $-(3, 1, 6, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1)$ | $(-2, 22)$ | $11$ |

# おわり