Parametrization of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-representations of surface groups

蒲谷祐一（Kabaya Yuichi）*

1　序

S を種数 $g \geq 2$ の閉曲面とする．S 上の標識付き双曲構造全体のなす空間は Teichmüller 空間と呼ばれる．Fenchel-Nielsen 座標によりこの空間は $6g-6$ 次元の Euclid 空間と同相になる事がわかる．一方，S の標識付き双曲構造は基本群 $\pi_1(S)$ の $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ への離散忠実表現の共役類と同一視できる．ここで $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ は双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の向きを保つ等長変換群である．この群は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ と同相であるので，Teichmüller 空間は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 表現のなす空間を共役の作用で割ったもの $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{conj.}$ の部分集合とみなせる．

この空間の複素化として $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$ を考える事ができる．$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は 3 次元双曲空間の向きを保つ等長変換とみなせるので，$\pi_1(S)$ の離散忠実表現は $S \times (-1,1)$ 上に双曲構造を与える．特に $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$ は quasi-Fuchsian 表現を開集合として含む．Fenchel-Nielsen 座標の複素化として quasi-Fuchsian 表現の Fenchel-Nielsen 座標が Kourouniotis [Kou] と Tan [Tan] により定義されている．

本稿では，quasi-Fuchsian 表現を含むより広いクラスの $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現に対して Fenchel-Nielsen 座標を拡張した結果 [Kab] について報告する．具体的には $\mathbb{C}^{6g-6}$ の開集合から $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))/\mathrm{conj.}$（正確には $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-character variety）への有理写像を与えた．この写像の像は quasi-Fuchsian 表現をすべて含み，$\mathrm{SO}(3)$ 表現といった双曲幾何から離れた表現も含む．構成は非常に初等的で，与えられた座標に対して具体的な表現を行列で書く事も簡単にできる.（Fuchsian 表現に関しては [Ok1]，[Mas] を参照.）またパンツ分解を変えた際の座標変換を完全に記述した.（Fuchsian 表現については [Ok2] でなされている.）

2　Fenchel-Nielsen 座標

まず普通の Fenchel-Nielsen 座標について振り返る．S を種数 $g \geq 2$ の閉曲面とする．$C = c_1 \cup \cdots \cup c_{3g-3}$ を S のパンツ分解とする．つまり c_i は S 上の単純閉曲線で $S \setminus C$ が 3 つ穴あき球面からなるとする（図 1 左）．S 上に双曲計量が与えられると，c_i にホモトピックな測地線の長さ l_i を定義する事ができる．よって l_i は Teichmüller 空間上の関数を与える．

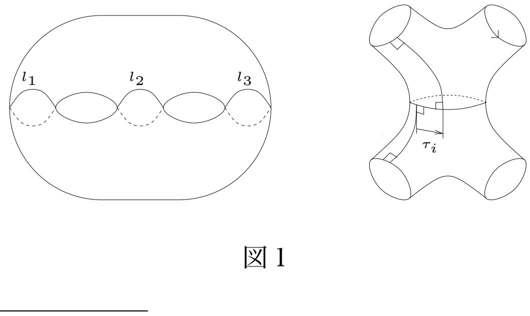

図 1

*大阪大学理学研究科数学専攻 学振特別研究員 PD，y-kabaya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

このほかに各 c_i においてツイストパラメータ τ_i が図 1 右のように定義できる．これらのパラメータの組 $(l_i, \tau_i) \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})^{3g-3}$ は Teichmüller 空間の大域座標を与える事がわかる．これは (1) 各パンツの双曲構造が c_i の長さで一意に決まる，(2) パンツの双曲構造のつなぎ方はツイストパラメータで記述できる，という事実から示される．

これと同様の事を $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現について行う．すなわち，(1) パンツの基本群の表現は境界のモノドロミーの固有値で一意に決まる（§5），(2) パンツの表現の間の関係は cross ratio で記述できる（§6），ことを示す．

3 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

まず $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は以下で定義される：

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc=1 \right\}, \quad \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}.$$

$\mathbb{C}P^1$ を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視すると，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$（および $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$）は $\mathbb{C}P^1$ に次のように作用する：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

A を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元とする．A の固有ベクトルの射影化は，A の $\mathbb{C}P^1$ 上への作用の固定点と 1 対 1 に対応する事がわかる．よって $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元は単位元でなければ $\mathbb{C}P^1$ に 1 つまたは 2 つの固定点を持つ．

$A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が 2 つの固定点 x, y を持つとする．また e を x に対応する固有値とする．(よって e^{-1} は y に対応する固有値.) このとき A は次の行列で与えられる：

$$M(e;x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} ex - e^{-1}y & -(e-e^{-1})xy \\ e-e^{-1} & -ey+e^{-1}x \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

例えば，$M(e;\infty,0) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$，$M(e;0,\infty) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ となる．

補題 3.1. $x, y \in \mathbb{C}P^1$ を異なる 2 点とする．z_1, z_2 を x, y とは異なる $\mathbb{C}P^1$ の点とする．（z_1 と z_2 は一致するかもしれない.）このとき $M(t;x,y) \cdot z_1 = z_2$ となる $t \in \mathbb{C}^*$ が符号を除いて一意に決まる．実際 t は次で与えられる：

$$t^2 = \frac{(x-z_1)(y-z_2)}{(x-z_2)(y-z_1)} = [y : x : z_1 : z_2].$$

証明は (3.1) に従って $M(t;x,y) \cdot z_1 = z_2$ を解けば得られる．ここで右辺は *cross ratio* で $\mathbb{C}P^1$ 上の 4 点 x_0, x_1, x_2, x_3 に対して次で定義する：

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] = \frac{x_3 - x_0}{x_3 - x_1} \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}.$$

補題 3.2. (x_1, x_2, x_3) を $\mathbb{C}P^1$ の異なる 3 点，(x'_1, x'_2, x'_3) を別の異なる 3 点とする．($x_i = x'_j$ でも構わない.) このとき $Ax_i = x'_i$ となる $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の元が一意に定まる．実際次の行列で与えられる：

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x'_1-x'_2)(x'_2-x'_3)(x'_3-x'_1)}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \\
a_{11} &= x_1x'_1(x'_2-x'_3) + x_2x'_2(x'_3-x'_1) + x_3x'_3(x'_1-x'_2), \\
a_{12} &= x_1x_2x'_3(x'_1-x'_2) + x_2x_3x'_1(x'_2-x'_3) + x_3x_1x'_2(x'_3-x'_1), \\
a_{21} &= x_1(x'_2-x'_3) + x_2(x'_3-x'_1) + x_3(x'_1-x'_2), \\
a_{22} &= x_1x'_1(x_2-x_3) + x_2x'_2(x_3-x_1) + x_3x'_3(x_1-x_2).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

証明．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置く．$(x_1, x_2, x_3) = (0, \infty, 1)$ なら $b/d = x_1$, $a/c = x_2$, $(a+b)/(c+d) = x_3$ が成り立つので A は

$$\frac{1}{\sqrt{-(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}} \begin{pmatrix} x_2(x_3 - x_1) & x_1(x_2 - x_3) \\ (x_3 - x_1) & (x_2 - x_3) \end{pmatrix}$$

で与えられる．同様に $(0, \infty, 1) \mapsto (x_1', x_2', x_3')$ となる行列を考えて上のものと合成すると結論を得る． □

4 Character variety

群 Γ に対し，準同型 $\rho : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を表現という．$\rho(\Gamma)$ が $\mathbb{C}P^1$ に固定点を持つとき ρ は可約であるといい，そうでない表現は既約と呼ばれる．Γ から $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ への表現の全体 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ には $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が共役で作用する．$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ には自然に位相が入るがこの作用の商集合は一般にはよい位相空間にならない．そこで適切な商空間として character variety $X_{SL}(\Gamma)$ が定義される [CS]．ただし既約表現のなす部分集合には $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ がきれいに作用し，その商空間は character variety の部分集合と見なせる．本稿では主に既約表現について考えるので character variety とは単に $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ による商空間と見なす．同様に $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の character variety $X_{PSL}(\Gamma)$ も定義され，既約表現に関しては単に $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の共役による作用の商空間とみなせる [HP]．とくに Γ が曲面の基本群 $\pi_1(S)$ であるときには単に $X_{SL}(S)$，$X_{PSL}(S)$ と書くことにする．

5 ３つ穴あき球面 P の場合

P を３つ穴あき球面（パンツ）とする．$\pi_1(P)$ の生成元を図２左のようにとる．ここで $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$ を満たす．

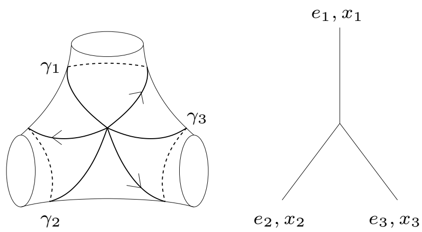

図２

命題 **5.1.** $\rho : \pi_1(P) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を既約表現とする． 各 $\rho(\gamma_i)$ は $\mathbb{C}P^1$ に固定点を２つ持つとする．e_i を $\rho(\gamma_i)$ の固有値の１つとし，対応する固定点を x_i とする.（この状況を模式的に図２右の様に書く事にする.）このとき別の固定点 y_i は e_1, e_2, e_3 と x_1, x_2, x_3 から一意に決まる：

$$y_i = \frac{e_i^2 e_{i+1} x_{i+1}(x_i - x_{i+2}) + e_{i+1} x_{i+2}(x_{i+1} - x_i) + e_i e_{i+2} x_i (x_{i+2} - x_{i+1})}{e_i^2 e_{i+1}(x_i - x_{i+2}) + e_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + e_i e_{i+2}(x_{i+2} - x_{i+1})}. \tag{5.1}$$

よって (3.1) から ρ も e_1, e_2, e_3 と x_1, x_2, x_3 から一意に決まる：

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma_i) &= \frac{1}{e_i e_{i+1}(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_i)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \\
a_{11} &= e_i^2 e_{i+1} x_i (x_i - x_{i+2}) + e_{i+1} x_{i+2}(x_{i+1} - x_i) + e_i e_{i+2} x_i (x_{i+2} - x_{i+1}), \\
a_{12} &= x_i (e_i^2 e_{i+1} x_{i+1}(x_{i+2} - x_i) + e_{i+1} x_{i+2}(x_i - x_{i+1}) + e_i e_{i+2} x_i (x_{i+1} - x_{i+2})), \\
a_{21} &= e_i^2 e_{i+1}(x_i - x_{i+2}) + e_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + e_i e_{i+2}(x_{i+2} - x_{i+1}), \\
a_{22} &= e_i^2 e_{i+1} x_{i+1}(x_{i+2} - x_i) + e_{i+1} x_i (x_i - x_{i+1}) + e_i e_{i+2} x_i (x_{i+1} - x_{i+2}).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

証明. $(x_1,x_2,x_3)=(0,\infty,1)$ と仮定する．このとき (3.1) より

$$\rho(\gamma_1)=\begin{pmatrix} e_1^{-1} & 0 \\ \frac{e_1^{-1}-e_1}{y_1} & e_1 \end{pmatrix},\quad \rho(\gamma_2)=\begin{pmatrix} e_2 & (e_2^{-1}-e_2)y_2 \\ 0 & e_2^{-1} \end{pmatrix},\quad \rho(\gamma_3)=\frac{1}{y_3-1}\begin{pmatrix} e_3^{-1}y_3-e_3 & (e_3-e_3^{-1})y_3 \\ e_3^{-1}-e_3 & e_3y_3-e_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

となる．$\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)=\rho(\gamma_3)^{-1}$ より

$$y_1=\frac{e_1-e_1^{-1}}{e_2^{-1}e_3-e_1^{-1}},\quad y_2=\frac{e_2-e_1e_3^{-1}}{e_2-e_2^{-1}},\quad y_3=\frac{e_2-e_1e_3^{-1}}{e_2-e_1e_3}.$$

を得る．一般の場合は補題 3.2 を用いて示せる． □

逆に任意の複素数 $e_1,e_2,e_3\neq 0$ と $\mathbb{C}P^1$ の異なる 3 点 x_1,x_2,x_3 に対して (5.2) で与えられる行列は $\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)\rho(\gamma_3)=I$ を満たすことがわかる．今後次の 2 つの条件を満たす表現 ρ について考える．

(C1) 各 i に対して $\rho(\gamma_i)$ は 2 つの固定点を持つ．

(C2) ρ は既約．

ここで (C1) の必要十分条件は各 i に対して $e_i\neq\pm 1$ となる事である．(C2) については次が成り立つ．

命題 5.2. e_1,e_2,e_3 を 0 でない複素数，x_1,x_2,x_3 を $\mathbb{C}P^1$ の異なる 3 点とする．このとき (5.2) で与えられる $\pi_1(P)$ の表現は $e_1=e_2e_3$, $e_2=e_3e_1$, $e_3=e_1e_2$, $e_1e_2e_3=1$ でない限り既約.

証明. $\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)\rho(\gamma_3)=1$ より $\{\rho(\gamma_i)\}_{i=1,2,3}$ のうち 2 つが共通の固定点を持てば残りの行列もその固定点を共有する．よって ρ は次のいずれかが成立する場合に可約となる：

$$x_1=y_2=y_3,\quad y_1=x_2=y_3,\quad y_1=y_2=x_3,\quad y_1=y_2=y_3.$$

(仮定より $x_i=x_j (i\neq j)$ とはならない．）例えば $x_1=y_2$ のときには (5.1) より

$$x_1=\frac{{e_2}^2e_3x_3(x_2-x_1)+e_3x_1(x_3-x_2)+e_2e_1x_2(x_1-x_3)}{{e_2}^2e_3(x_2-x_1)+e_3(x_3-x_2)+e_2e_1(x_1-x_3)}$$

となる．x_i らは異なる点なので $e_1=e_2e_3$ を得る．同様に $y_2=y_3$ は $(1-e_1e_2e_3)(e_1-e_2e_3)=0$ と同値となる．よって $x_1=y_2=y_3$ は $e_1=e_2e_3$ と同値となる．同様に $y_1=x_2=y_3$ は $e_2=e_3e_1$ と，$y_1=y_2=x_3$ は $e_3=e_1e_2$ と，$y_1=y_2=y_3$ は, $e_1e_2e_3=1$ と同値になる事が示せる． □

6 Twist parameter

次に 4 つ穴あき球面 S の基本群の表現を考える．S を $S=P\cup P'$ と 2 つのパンツに分解する．ρ を $\pi_1(S)$ の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ への表現で，$\rho|_{\pi_1(P)}$ と $\rho|_{\pi_1(P')}$ はそれぞれ (C1)，(C2) を満たすとする．基本群の生成元を固定するために，パンツ分解と双対なグラフ G を S 内にとる（図 3）．

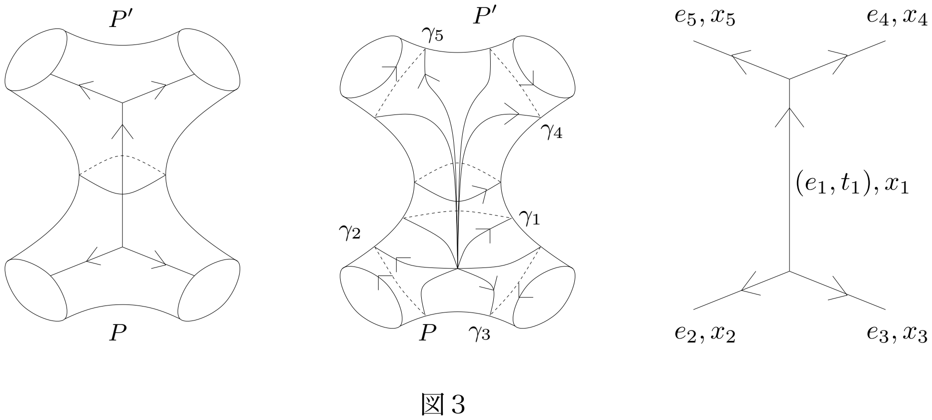

図 3

G に沿って $\pi_1(S)$ の生成元 $\gamma_1, \dots \gamma_5$ を図 3 の様にとる．各 i に対して $\rho(\gamma_i)$ の固有値 e_i を 1 つ固定し，対応する固定点を x_i とする．命題 5.1 により $\rho(\gamma_1)$ の別の固定点 y_1（${e_1}^{-1}$ に対応）は x_1, x_2, x_3 から一意に決まる．ここで補題 3.1 より

$$M(\sqrt{-t_1}; x_1, y_1) \cdot x_2 = x_5$$

を満たす $t_1 \in \mathbb{C}^*$ が一意に存在する．（ここで $\sqrt{t_1}$ ではなく $\sqrt{-t_1}$ の方が Fuchsian 表現を考えるときに自然になる．）この t_1 をツイストパラメータとよぶことにする．t_1 は $e_1, \dots, e_5$ の選び方に依存するが，一度固定してしまえば ρ の共役類に依らないことがわかる．$x_1, \dots, x_5$ の間には次の関係式が成り立つ．

定理 6.1. e_i を $\rho(\gamma_i)$ の固有値の 1 つとし，x_i を e_i に対応する固定点とする．また t_1 をツイストパラメータとする．（この状況を模式的に図 3 の右図の様に書く事にする．）このとき

$$\begin{aligned}
x_4 &= \frac{a_1}{a_2}, \\
&a_1 = e_1(-(e_1e_3 - e_2)(e_1e_4 - e_5)t_1 + e_3(e_1e_5 - e_4))x_1(x_2 - x_3) \\
&\quad + {e_1}^2e_2(e_1e_5 - e_4)x_2(x_3 - x_1) + e_2(e_1e_5 - e_4)x_3(x_1 - x_2), \\
&a_2 = e_1(-(e_1e_3 - e_2)(e_1e_4 - e_5)t_1 + e_3(e_1e_5 - e_4))(x_2 - x_3) \\
&\quad + {e_1}^2e_2(e_1e_5 - e_4)(x_3 - x_1) + e_2(e_1e_5 - e_4)(x_1 - x_2),
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$x_5 = \frac{((e_1e_3 - e_2)t_1 + e_1e_3)x_1(x_2 - x_3) + {e_1}^2e_2x_2(x_3 - x_1) + e_2x_3(x_1 - x_2)}{((e_1e_3 - e_2)t_1 + e_1e_3)(x_2 - x_3) + {e_1}^2e_2(x_3 - x_1) + e_2(x_1 - x_2)} \tag{6.2}$$

が成り立つ．逆に x_2 と x_3 も x_1, x_4, x_5 と $e_1, \dots, e_5, t_1$ の有理関数で書ける．

証明. $M(\sqrt{-t_1}; x_1, y_1) \cdot x_2 = x_5$ より (3.1) から

$$x_5 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot x_2 = \frac{(x_2 - y_1)t_1x_1 + (x_2 - x_1)y_1}{(x_2 - y_1)t_1 + (x_2 - x_1)}. \tag{6.3}$$

(5.1) を $\rho|_{\pi_1(P)}$ に適用すると

$$y_1 = \frac{e_1^2e_2x_2(x_1 - x_3) + e_2x_3(x_2 - x_1) + e_1e_3x_1(x_3 - x_2)}{e_1^2e_2(x_1 - x_3) + e_2(x_2 - x_1) + e_1e_3(x_3 - x_2)}. \tag{6.4}$$

(6.4) を (6.3) に代入して (6.2) を得る．同様の計算で (6.1) も得られる． □

ここで境界に面している G の辺が内向きならば (6.1) と (6.2) の e_i を ${e_i}^{-1}$ に置き換える事とする．こうする事で，まわりのパンツの表現をつなぎあわせる際に適合する．

1 つ穴あきトーラス上の閉曲線に対しても図 4 で示されるように適当な被覆に持ち上げて，4 つ穴あき球面の場合に帰着させてツイストパラメータを定義する．

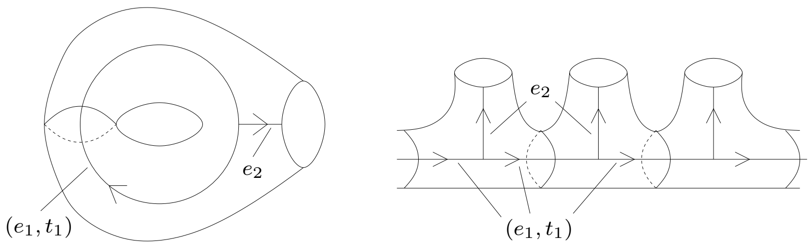

図 4

7　基本群の生成元に対応した行列

S を種数 $g \geq 2$ の閉曲面とする．S のパンツ分解を $C = c_1 \cup \cdots \cup c_{3g-3}$ とし，C に双対な有向グラフ G をとる．G の各辺には固有値 e_i とツイストパラメータ t_i が与えられているとする．これらのパラメータから $\pi_1(S)$ の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現が復元する事を示す．(条件 (C1) と (C2) を満たすように e_i 達に制限が必要だが，それについては §9 で述べる．)

G 内に極大ツリー T をとる．$G \setminus T$ の辺を $u_1, \ldots, u_g$ と書くことにする．S から u_i と交わる閉曲線 c_i らを除いたものを S_0 とする（図 5 右）．

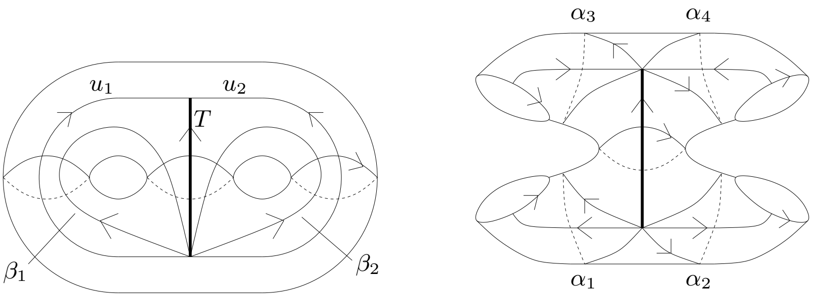

図 5：S と S_0.

S_0 は $2g$ 個の境界をもつ球面となる．T 内に基点をとる．各 u_i に対して図 5 の右の様に $\alpha_i, \alpha_{g+i} \in \pi_1(S_0)$ を定める．これらは $\pi_1(S_0)$ の生成元を与え次の表示を得る；

$$\pi_1(S_0) = \langle \alpha_1, \ldots \alpha_{2g} \mid \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{2g}} = 1 \rangle \tag{7.1}$$

($i_1, \ldots, i_{2g}$ は G と T のとり方による.) 次に β_i を T と u_i を結んで得られるループとする（図 5 の左）．このとき $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ は ${\alpha_{g+i}}^{-1} = {\beta_i}^{-1}\alpha_i\beta_i$ $(i = 1, \ldots g)$ を満たす．$\pi_1(S)$ は次の表示をもつ：

$$\pi_1(S) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}, \beta_1, \ldots, \beta_g \mid {\alpha_{g+i}}^{-1} = {\beta_i}^{-1}\alpha_i\beta_i \quad (i = 1, \ldots, g), \quad \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_{2g}} = 1 \rangle.$$

つぎにパラメータ e_i と t_i から $\rho(\alpha_i)$ と $\rho(\beta_i)$ を具体的に構成する．(次の節の例も参照.) まず S_0 のどれか 1 つのパンツの基本群の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現を共役類の中で 1 つ固定する，つまり境界のループに対応する固定点を適当に決めておく．次に定理 6.1 を繰り返すことによって c_i に対応する固定点をすべて求める事ができる．これらの固定点から命題 5.1 により表現 $\rho : \pi_1(S_0) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が得られる．

さらに $\rho(\alpha_{g+i})^{-1} = \rho(\beta_i)^{-1}\rho(\alpha_i)\rho(\beta_i)$ となる $\rho(\beta_i)$ を見つけてくれば $\pi_1(S)$ の表現を得る．$\widetilde{G}$ を G の普遍被覆とする．定理 6.1 を β_i のリフトに沿って $\widetilde{G}$ に繰り返す．β_i のリフトの始点に対応する 3 つの固定点を終点に対応する 3 つの固定点に送る $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の元を，補題 3.2 により求める（次節の $\rho(\beta_1)$ の計算を参照）．この元は $\rho(\alpha_{g+i})^{-1} = \rho(\beta_i)^{-1}\rho(\alpha_i)\rho(\beta_i)$ をみたす事が分かる．よって表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ を得る．$\rho(\alpha_i)$ は自然に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元として定義できるが，$\rho(\beta_i)$ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元として自然に定義する方法はない事を注意しておく．

8　例：1 点穴あきトーラスの場合

ここでは 1 点穴あきトーラスの基本群の表現を例にとって説明する．1 点穴あきトーラスは 1 つのパンツに分解される．双対有向グラフ G，極大ツリー T，固有値パラメータ $e_1, e_2,$ とツイストパラメータ t_1 を図 6 の左の様に定める．

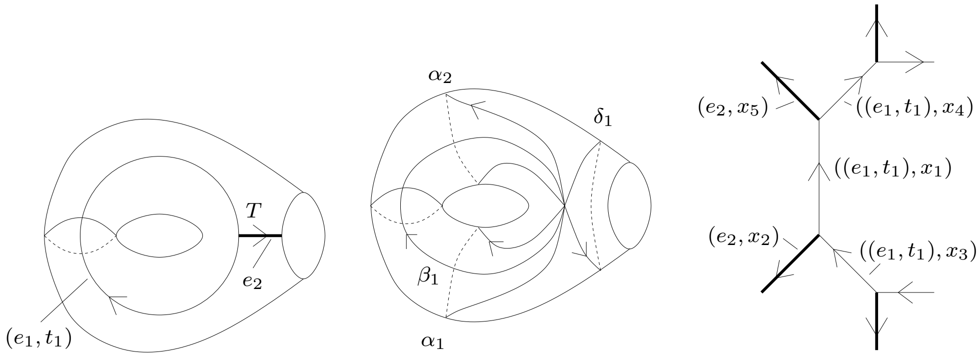

図６：左図は穴あきトーラスのパンツ分解とその双対グラフ G，T はその極大ツリー．
中図はそれに付随した基本群の生成系．右図は G の普遍被覆 $\widetilde{G}$ の一部．

このとき G，T から得られる基本群の表示は

$$\langle \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\delta_1 \mid \alpha_1\delta_1\alpha_2=1,\quad \alpha_2^{-1}=\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1\rangle = \langle \alpha_1,\beta_1,\delta_1 \mid [\beta_1^{-1},\alpha_1^{-1}]=\delta_1^{-1}\rangle$$

となる (図６の中)．$\widetilde{G}$ の辺に図６の様に固定点 $x_1,\ldots,x_5$ を定める．補題3.2 より，このうち３つは適当に選んでいいので $(x_1,x_2,x_3)=(\infty,0,1)$ とする．(5.2) を $(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_1^{-1})$ と $(x_1,x_2,x_3)=(\infty,0,1)$ に適用すると，

$$\rho(\alpha_1)=\begin{pmatrix} e_1 & e_1^{-1}-e_1^{-1}e_2^{-1} \\ 0 & e_1^{-1}\end{pmatrix},\quad \rho(\delta_1)=\begin{pmatrix} e_2^{-1} & 0 \\ e_1^2-e_2 & e_2\end{pmatrix},\quad \rho(\alpha_2)=\begin{pmatrix} e_1^{-1}e_2 & e_1^{-1}-e_1^{-1}e_2 \\ e_1^{-1}e_2-e_1 & e_1+e_1^{-1}-e_1^{-1}e_2\end{pmatrix}$$

を得る．(6.1) と (6.2) に $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)=(e_1,e_2,e_1^{-1},e_1,e_2)$ と $(x_1,x_2,x_3)=(\infty,0,1)$ を適用して

$$x_4=\frac{e_1^2-e_2}{e_2(e_1^2-1)}t_1+\frac{1-e_2}{e_2(e_1^2-1)},\quad x_5=\frac{(t_1+1)(1-e_2)}{e_2(e_1^2-1)}.$$

$\rho(\beta_1)$ は $(\infty,0,1)$ を (x_4,x_5,∞) に移す $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の元だから，補題 3.2 より

$$\rho(\beta_1)=\frac{1}{\sqrt{-e_2t_1}(e_1^2-1)}\begin{pmatrix}(e_2-e_1^2)t_1+(e_2-1) & (t_1+1)(1-e_2) \\ -e_2(e_1^2-1) & e_2(e_1^2-1)\end{pmatrix}$$

で与えられる．これらは関係式

$$\rho(\beta_1)^{-1}\rho(\alpha_1)^{-1}\rho(\beta_1)\rho(\alpha_1)=\rho(\delta_1)^{-1}$$

を満たす事がわかる．$e_2=-1$ とすると

$$\rho(\alpha_1)=\begin{pmatrix} e_1 & 2e_1^{-1} \\ 0 & e_1^{-1}\end{pmatrix},\quad \rho(\beta_1)=\frac{1}{\sqrt{t_1}(e_1^2-1)}\begin{pmatrix}(e_1^2+1)t_1+2 & -2(t_1+1) \\ -e_1^2+1 & e_1^2-1\end{pmatrix}.$$

$A=\rho(\alpha_1)$，$B=\rho(\beta_1)$ と置くと

$$\mathrm{tr}(A)=e_1+e_1^{-1},\quad \mathrm{tr}(B)=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{(e_1+e_1^{-1})(t_1+1)}{(e_1-e_1^{-1})},\quad \mathrm{tr}(AB)=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{(e_1+e_1^{-1})(e_1t_1+e_1^{-1})}{(e_1-e_1^{-1})}$$

が成り立つ．これらは Markov 恒等式

$$\mathrm{tr}(A)^2+\mathrm{tr}(B)^2+\mathrm{tr}(AB)^2-\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(AB)=0.$$

を満たしている事が確かめられる．

9　$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-character variety のパラメータ付け

まずパンツ P の基本群の表現について考える．$\pi_1(P)$ の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現の共役類は $(\mathrm{tr}\,\rho(\gamma_1), \mathrm{tr}\,\rho(\gamma_2), \mathrm{tr}\,\rho(\gamma_3))$ で決まる事がわかる [Gol]．よって次が成立する．

補題 9.1. (C1) と (C2) を満たす $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現の共役類の集合は

$$\{(e_1,e_2,e_3) \in (\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\})^3 \mid e_1 \neq e_2e_3, e_2 \neq e_3e_1, e_3 \neq e_1e_2, e_1e_2e_3 \neq 1\}\}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

と同一視できる．ここで $(s_1,s_2,s_3) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ は

$$(e_1,e_2,e_3) \mapsto ({e_1}^{s_1}, {e_2}^{s_2}, {e_3}^{s_3}). \tag{9.1}$$

と作用する．

つぎに $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現を考える．$\pi_1(P)$ の任意の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現に持ち上がる．例えば (5.2) は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現へのリフトと思える．他の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表現へのリフトは $H^1(P;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の作用で得られる．ここで $H^1(P;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(P);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ なので $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \in \{\pm1\}^3$ で $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ を満たす物と思える．このときこの元の作用は

$$(e_1,e_2,e_3) \mapsto (\varepsilon_1e_1, \varepsilon_2e_2, \varepsilon_3e_3). \tag{9.2}$$

と書ける．

補題 9.2. (C1) と (C2) を満たす $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現の共役類の集合は

$$(\{(e_1,e_2,e_3) \in (\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\})^3 \mid {e_1}^{\pm1}{e_2}^{\pm1}{e_3}^{\pm1} \neq 1\}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3/H^1(P;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

と同一視できる．($(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ の作用は (9.1)，$H^1(P;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の作用は (9.2) で与えられる．)

S を種数 g の曲面とし，$C = c_1 \cup \cdots \cup c_{3g-3}$ をパンツ分解とする．G を C に双対となる S 内の有向グラフとする．G の各辺には固有値パラメータ e_i とツイストパラメータ t_i を与えておく．$\mathcal{P}$ を固有値の 3 組 (e_i,e_j,e_k) で，ある $S\setminus C$ のパンツの境界に対応しているものとする．

$$E(S,C) = \{(e_1,e_2,\ldots,e_{3g-3}) \mid e_i \in \mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\}, \quad e_i^{\pm1}e_j^{\pm1}e_k^{\pm1} \neq 1 \text{ for } \{i,j,k\} \in \mathcal{P}\}$$

とおくと，§7 の構成から有理写像

$$E(S,C) \times (\mathbb{C}^*)^{3g-3} \to X_{PSL}(S)$$

を得る．ここで $E(S,C)$ は固有値パラメータ，$(\mathbb{C}^*)^{3g-3}$ はツイストパラメータに対応する．パンツの場合の $H^1(P;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は大域的には $H_1(G;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と自然に同一視できる事が分かる．ツイストパラメータは $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現のみで決まるので上の写像は

$$(E(S,C)/H_1(G;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \times (\mathbb{C}^*)^{3g-3} \to X_{PSL}(S)$$

を導く．パンツの場合と同様に $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3g-3}$ が $e_i \to {e_i}^{-1}$ と作用する．この作用はツイストパラメータに非自明に作用する．例えば 4 つ穴あき球面の場合，定理 6.1 の記号の元，次のように作用する：

$$\begin{aligned}
(e_1 \to {e_1}^{-1}) \cdot (e_1,t_1) &= ({e_1}^{-1}, {t_1}^{-1}),\\
(e_2 \to {e_2}^{-1}) \cdot (e_2,t_1) &= ({e_2}^{-1}, \frac{e_2e_3-e_1}{1-e_1e_2e_3}\frac{e_1e_3-e_2}{e_1e_2-e_3}t_1),\\
(e_3 \to {e_3}^{-1}) \cdot (e_3,t_1) &= ({e_3}^{-1}, t_1),\\
(e_4 \to {e_4}^{-1}) \cdot (e_4,t_1) &= ({e_4}^{-1}, t_1),\\
(e_5 \to {e_5}^{-1}) \cdot (e_5,t_1) &= ({e_5}^{-1}, \frac{e_4e_5-e_1}{1-e_1e_4e_5}\frac{e_1e_4-e_5}{e_1e_5-e_4}t_1).
\end{aligned}$$

固有値を決めてしまえばツイストパラメータは共役類により一意に決まる事から，

$$((E(S,C)/H_1(G;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))\times(\mathbb{C}^*)^{3g-3})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3g-3}\to X_{PSL}(S)$$

は単射となる．

参考文献

[CS] M. Culler, P. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of* 3*-manifolds*, Ann. of Math. (2) 117 (1983), no. 1, 109–146.

[Gol] W. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. Math. 93 (1988) no. 2, 557–607.

[HP] M. Heusener and J. Porti, *The variety of characters in* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004), Special Issue, 221–237.

[Kab] Y. Kabaya, *Parametrization of PSL(2,C)-representations of surface groups*, preprint, arXiv:1110.6674.

[Kou] Christos Kourouniotis, *Complex length coordinates for quasi-Fuchsian groups*, Mathematika 41 (1994), no. 1, 173-188.

[Mas] Bernard Maskit, *Matrices for Fenchel-Nielsen coordinates*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 26 (2001), no. 2, 267-304.

[Ok1] Takayuki Okai, *An explicit description of the Teichmüller space as holonomy representations and its applications*, Hiroshima Math. J. 22 (1992), no. 2, 259-271.

[Ok2] Takayuki Okai, Effects of a change of pants decompositions on their Fenchel-Nielsen coordinates, Kobe J. Math. 10 (1993), no. 2, 215-223.

[Tan] Ser Peow Tan, *Complex Fenchel-Nielsen coordinates for quasi-Fuchsian structures*, Internat. J. Math. 5 (1994), no. 2, 239-251.