

# Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups

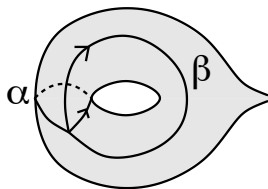
蒲谷祐一 (かばや ゆういち)  
京都大学理学研究科

スライド : <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kabaya/>

明治大学 駿河台キャンパス, 2015年3月23日

## 0. 序

$S$  : 1点穴あきトーラス  
 $\alpha, \beta \in \pi_1(S) \cong F_2$  : 生成元  
s.t.  $[\alpha, \beta]$  が穴に対応



表現 (準同型)

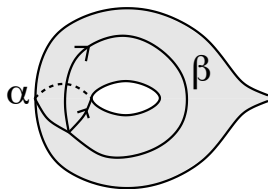
$$\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\{\pm \mathrm{id}\}$$

を考える.

問. いつ  $\rho$  の像は離散的か?,  $\rho$  は単射 (忠実) か?

# 0. 序

$S$  : 1点穴あきトーラス  
 $\alpha, \beta \in \pi_1(S) \cong F_2$  : 生成元  
s.t.  $[\alpha, \beta]$  が穴に対応



表現 (準同型)

$$\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\{\pm \mathrm{id}\}$$

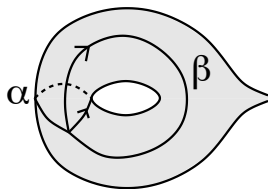
を考える.

**問.** いつ  $\rho$  の像は離散的か?,  $\rho$  は単射 (忠実) か?

**例.**  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$  : Fuchs 表現.  
( $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$  へ少し変形しても離散忠実.)

# 0. 序

$S$  : 1点穴あきトーラス  
 $\alpha, \beta \in \pi_1(S) \cong F_2$  : 生成元  
s.t.  $[\alpha, \beta]$  が穴に対応



表現 (準同型)

$$\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\{\pm \mathrm{id}\}$$

を考える.

問. いつ  $\rho$  の像は離散的か?,  $\rho$  は単射 (忠実) か?

例.  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$  : Fuchs 表現.  
( $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$  へ少し変形しても離散忠実.)

問. どこまで離散忠実なまま変形可能?

# 1. クライン群論から

$S = S_{1,1}$  : 1点穴あきトーラス,  $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$

$$\begin{aligned} X(S) &= \{\rho : \pi_1 S \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} \mid \mathrm{tr} \rho([\alpha, \beta]) = -2\} / \sim_{\text{共役}}, \\ AH(S) &= \{[\rho] \in X(S) \mid \rho : \text{単射}, \rho(\pi_1 S) \text{ は離散的}\}, \\ QF(S) &= \{[\rho] \in AH(S) \mid \rho(\pi_1 S) \text{ は quasi-Fuchsian}\}. \end{aligned}$$

# 1. クライン群論から

$S = S_{1,1}$  : 1点穴あきトーラス,  $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$

$$\begin{aligned} X(S) &= \{\rho : \pi_1 S \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} \mid \mathrm{tr} \rho([\alpha, \beta]) = -2\} / \sim_{\text{共役}}, \\ AH(S) &= \{[\rho] \in X(S) \mid \rho : \text{単射}, \rho(\pi_1 S) \text{ は離散的}\}, \\ QF(S) &= \{[\rho] \in AH(S) \mid \rho(\pi_1 S) \text{ は quasi-Fuchsian}\}. \end{aligned}$$

- $QF(S)$  は  $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(\bar{S}) \cong \mathbb{R}^4$  と同相.  
( $\mathcal{T}(S)$  は  $S$  のタイヒミュラー空間)

# 1. クライン群論から

$S = S_{1,1}$  : 1点穴あきトーラス,  $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$

$X(S) = \{\rho : \pi_1 S \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} \mid \mathrm{tr} \rho([\alpha, \beta]) = -2\} / \sim_{\text{共役}},$   
 $AH(S) = \{[\rho] \in X(S) \mid \rho : \text{単射}, \rho(\pi_1 S) \text{ は離散的}\}.$   
 $QF(S) = \{[\rho] \in AH(S) \mid \rho(\pi_1 S) \text{ は quasi-Fuchsian}\}.$

- $QF(S)$  は  $\mathcal{T}(S) \times \overline{\mathcal{T}(S)} \cong \mathbb{R}^4$  と同相.  
( $\mathcal{T}(S)$  は  $S$  のタイヒミュラー空間)
- $\overline{QF(S)} = AH(S)$  (Density Theorem)

# 1. クライン群論から

$S = S_{1,1}$  : 1点穴あきトーラス,  $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$

$X(S) = \{\rho : \pi_1 S \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} \mid \mathrm{tr} \rho([\alpha, \beta]) = -2\} / \sim_{\text{共役}},$   
 $AH(S) = \{[\rho] \in X(S) \mid \rho : \text{単射}, \rho(\pi_1 S) \text{ は離散的}\}.$   
 $QF(S) = \{[\rho] \in AH(S) \mid \rho(\pi_1 S) \text{ は quasi-Fuchsian}\}.$

- $QF(S)$  は  $\mathcal{T}(S) \times \overline{\mathcal{T}(S)} \cong \mathbb{R}^4$  と同相.  
( $\mathcal{T}(S)$  は  $S$  のタイヒミュラー空間)
- $\overline{QF(S)} = AH(S)$  (Density Theorem)
- $AH(S)$  の元は完全に分類できる  
(Ending Lamination Theorem)



# 1. クライン群論から

$S = S_{1,1}$  : 1点穴あきトーラス,  $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$

$X(S) = \{\rho : \pi_1 S \rightarrow \mathrm{PSL}_2\mathbb{C} \mid \mathrm{tr} \rho([\alpha, \beta]) = -2\} / \sim_{\text{共役}},$   
 $AH(S) = \{[\rho] \in X(S) \mid \rho : \text{単射}, \rho(\pi_1 S) \text{ は離散的}\}.$   
 $QF(S) = \{[\rho] \in AH(S) \mid \rho(\pi_1 S) \text{ は quasi-Fuchsian}\}.$

- $QF(S)$  は  $\mathcal{T}(S) \times \overline{\mathcal{T}(S)} \cong \mathbb{R}^4$  と同相.  
( $\mathcal{T}(S)$  は  $S$  のタイヒミュラー空間)
- $\overline{QF(S)} = AH(S)$  (Density Theorem)
- $AH(S)$  の元は完全に分類できる  
(Ending Lamination Theorem)

しかし  $QF(S)$  の  $X(S)$  の中での形は非常に複雑.

## 2. 線型スライス

$\gamma \in \pi_1(S)$  の複素距離  $\lambda_\gamma : X(S) \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$  を

$$\lambda_\gamma(\rho) = 2 \operatorname{arccosh} (\operatorname{tr}(\rho(\gamma)) / 2)$$

$$= ( \rho(\gamma) \text{ の移動距離 } )$$

$$+ \sqrt{-1} ( \rho(\gamma) \text{ の回転角 } )$$

で定める  $(\rho(\gamma) \curvearrowright \mathbb{H}^3 : \text{双曲空間への作用})$ .

## 2. 線型スライス

$\gamma \in \pi_1(S)$  の複素距離  $\lambda_\gamma : X(S) \rightarrow \mathbb{C}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$  を

$$\lambda_\gamma(\rho) = 2 \operatorname{arccosh} (\operatorname{tr}(\rho(\gamma)) / 2)$$

$$= ( \rho(\gamma) \text{ の移動距離 } )$$

$$+ \sqrt{-1} ( \rho(\gamma) \text{ の回転角 } )$$

で定める  $(\rho(\gamma) \curvearrowright \mathbb{H}^3 : \text{双曲空間への作用})$ .

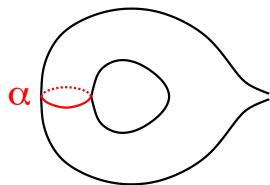
実数  $l > 0$  に対し,

$$X(l) = \{ [\rho] \in X(S) \mid \lambda_\alpha(\rho) = l \},$$

$$QF(l) = QF(S) \cap X(l).$$

線型スライス

(注. 予稿集の  $1/0 \leftrightarrow \alpha$ )



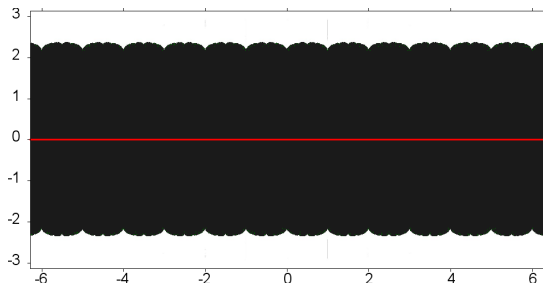
以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )



$\ell = 1.0$

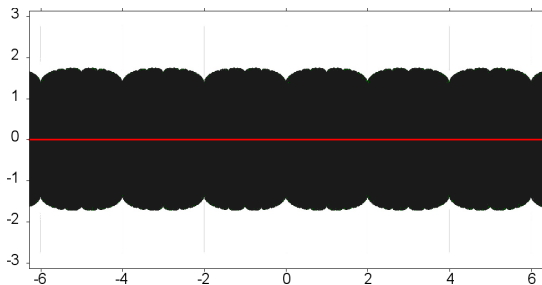
以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )



$$\ell = 2.0$$

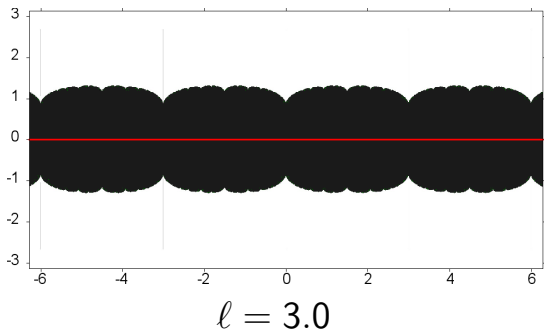
以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる.

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で, 各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )



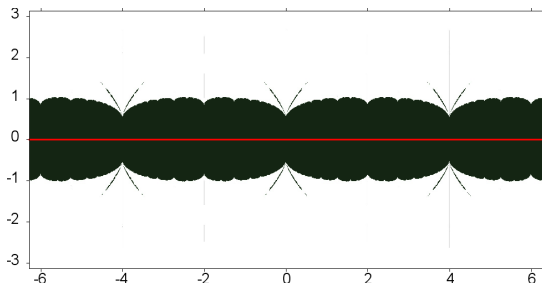
以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )



$$\ell = 4.0$$

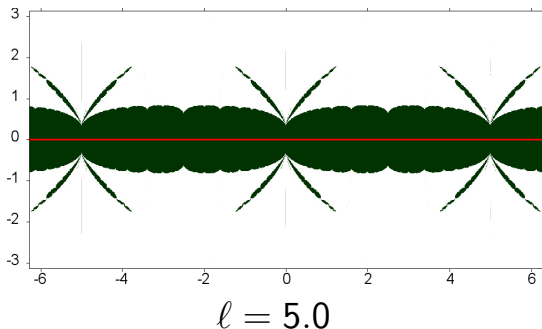
以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )





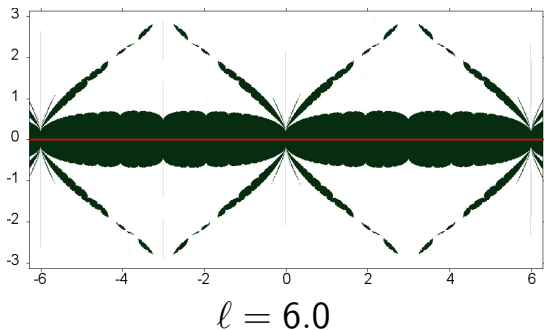
以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )



以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )
- $QF(\ell)$  には実軸 (Fuchs 表現に対応) を含む成分が唯一つある。これを標準的成分と呼ぶ。

以下の事実が知られている：

- $X(\ell)$  は

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

と同一視できる。

- $QF(\ell)$  は  $X(\ell)$  の開集合で、各連結成分は開円板と同相 ( $QF(S)$  の disk convexity (McMullen) )
- $QF(\ell)$  には実軸 (Fuchs 表現に対応) を含む成分が唯一つある。これを**標準的成分**と呼ぶ。
- $\ell > 0$  が十分小さければ  $QF(\ell)$  は標準的成分のみ (小森-山下, Otal) .

一方,  $\ell$  が大きい場合 :

## 定理 (小森-山下 (2012))

$\ell > 0$  が十分大きければ  $QF(\ell)$  は標準的でない成分をもつ.

一方,  $\ell$  が大きい場合 :

## 定理 (小森-山下 (2012))

$\ell > 0$  が十分大きければ  $QF(\ell)$  は標準的でない成分をもつ.

証明には Earle スライスの性質 (Komori-Series の結果) が用いられた.

一方,  $\ell$  が大きい場合 :

## 定理 (小森-山下 (2012))

$\ell > 0$  が十分大きければ  $QF(\ell)$  は標準的でない成分をもつ.

証明には Earle スライスの性質 (Komori-Series の結果) が用いられた.

今日は複素射影構造の理論を用いた別証明を紹介する.  
(標準的でない成分に '住所' を与える.)

### 3. 複素射影構造

$S$  : 曲面,  $\tilde{S}$  : 普遍被覆

定義 (複素射影構造,  $\mathbb{C}P^1$ -構造)

はめ込み  $\text{dev} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , 表現  $\text{hol} : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}_2\mathbb{C}$   
の組で

$$\text{dev}(\gamma \cdot x) = \text{hol}(\gamma) \cdot \text{dev}(x)$$

を満たすもの. ( $(G, X) = (\text{PSL}_2\mathbb{C}, \mathbb{C}P^1)$ -structure)

### 3. 複素射影構造

$S$  : 曲面,  $\tilde{S}$  : 普遍被覆

定義 (複素射影構造,  $\mathbb{C}P^1$ -構造)

はめ込み  $\text{dev} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , 表現  $\text{hol} : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}_2\mathbb{C}$   
の組で

$$\text{dev}(\gamma \cdot x) = \text{hol}(\gamma) \cdot \text{dev}(x)$$

を満たすもの. ( $(G, X) = (\text{PSL}_2\mathbb{C}, \mathbb{C}P^1)$ -structure)

$P(S) = \{S \text{ 上の (標識付き) 複素射影構造の同値類} \}$   
(+境界条件) とすると, ホロノミー  $\text{hol}$  は

$$\text{hol} : P(S) \rightarrow X(S)$$

を与える.



## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

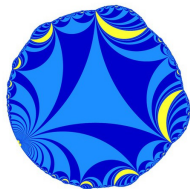
$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

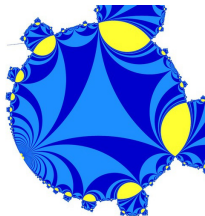
$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

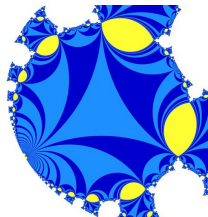
$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

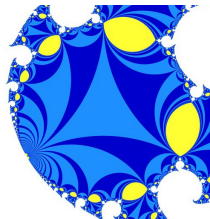
$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



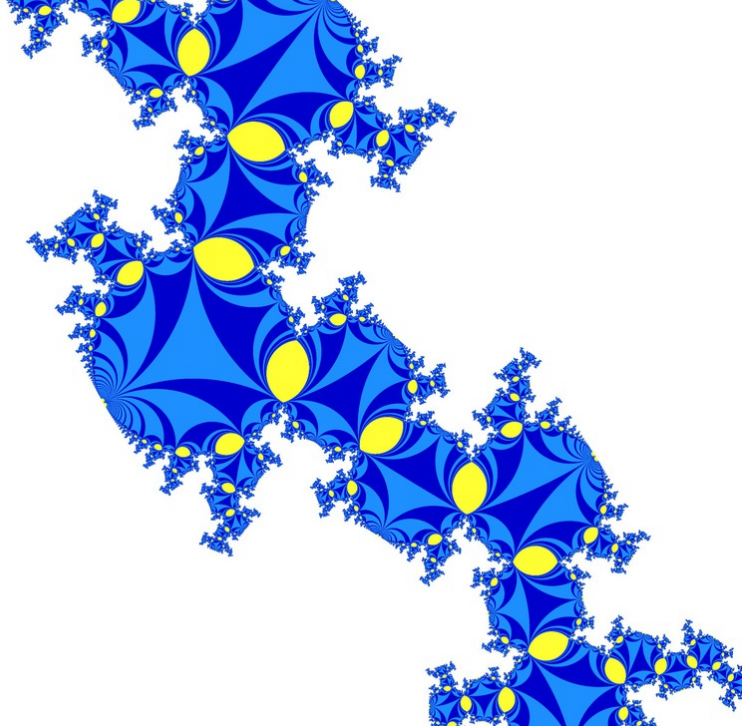
$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.



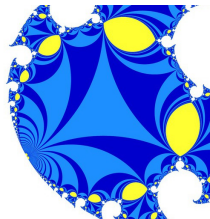


## 例. Fuchsian uniformization

双曲構造  $X \in \mathcal{T}(S)$  は

$$\text{dev} : \tilde{S} \cong \mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$$

により複素射影構造を与える.



$\text{dev}(\tilde{S})$

## 例. Grafting

$X \in \mathcal{T}(S)$ ,  $c : X$  上の単純測地線

$\Rightarrow c$  に沿って高さ  $b \geq 0$  のアニュラスを挿入する事で別の複素射影構造  $\text{Gr}_{b,c}(X)$  が得られる.

注. 非負の重み付き単純閉曲線  $(b \cdot c)$  全体は **measured lamination** の空間  $\mathcal{ML}(S)$  の中で稠密.

Grafting は  $\mathcal{ML}(S)$  に連続的に拡張する.

## 定理 (Thurston, 神島-Tan)

$$\begin{aligned} \text{Gr} : \mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S) &\rightarrow P(S) \\ (\mu, X) &\mapsto \text{Gr}_\mu(X) \end{aligned}$$

は同相写像.

Grafting は  $\mathcal{ML}(S)$  に連続的に拡張する.

## 定理 (Thurston, 神島-Tan)

$$\begin{aligned} \text{Gr} : \mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S) &\rightarrow P(S) \\ (\mu, X) &\mapsto \text{Gr}_\mu(X) \end{aligned}$$

は同相写像.

ホロノミーが quasi-Fuchsian である複素射影構造

$$\text{hol}^{-1}(QF(S)) \subset P(S)$$

は Goldman により分類されている.

$$Q_0 = \{C \in P(S) \mid \text{hol}(C) \in QF(S), \text{dev 是埋め込み}\}$$

$$Q_0 = \{C \in P(S) \mid \text{hol}(C) \in QF(S), \text{dev 是埋め込み}\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S) &= \left\{ \sum n_i \cdot c_i \mid n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_i: \text{disjoint scc's} \right\} \\ &= \{p\alpha + q\beta \in H_1(S; \mathbb{Z})\} / \{\pm 1\} \quad (S = S_{1,1}) \end{aligned}$$

( $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$  を  $H_1(S; \mathbb{Z})$  の生成元とみなす. )

$$Q_0 = \{C \in P(S) \mid \text{hol}(C) \in QF(S), \text{dev 是埋め込み}\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S) &= \left\{ \sum n_i \cdot c_i \mid n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_i: \text{disjoint scc's} \right\} \\ &= \{p\alpha + q\beta \in H_1(S; \mathbb{Z})\} / \{\pm 1\} \quad (S = S_{1,1}) \end{aligned}$$

( $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$  を  $H_1(S; \mathbb{Z})$  の生成元とみなす.)

$$Q_\mu = \{ \text{"}2\pi\mu\text{-grafting"} \text{ of } C \mid C \in Q_0 \} \quad (\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S))$$

( $\forall \mu, Q_\mu \xrightarrow{\text{hol}} QF(S)$  は同相写像.)

$$Q_0 = \{C \in P(S) \mid \text{hol}(C) \in QF(S), \text{ dev は埋め込み} \}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S) &= \left\{ \sum n_i \cdot c_i \mid n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_i: \text{ disjoint scc's} \right\} \\ &= \{p\alpha + q\beta \in H_1(S; \mathbb{Z})\} / \{\pm 1\} \quad (S = S_{1,1}) \end{aligned}$$

( $\alpha, \beta \in \pi_1(S)$  を  $H_1(S; \mathbb{Z})$  の生成元とみなす. )

$$Q_\mu = \{ \text{"}2\pi\mu\text{-grafting"} \text{ of } C \mid C \in Q_0 \} \quad (\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S))$$

( $\forall \mu, Q_\mu \xrightarrow{\text{hol}} QF(S)$  は同相写像.)

## 定理 (Goldman)

$$\text{hol}^{-1}(QF(S)) = \bigsqcup_{\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)} Q_\mu$$

$Q_0$  : standard,     $Q_\mu (\mu \neq 0)$  : exotic component

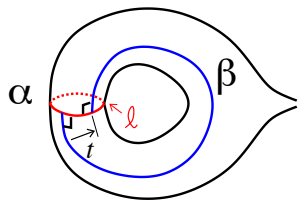


## 4. Complex Earthquake

$\alpha$  に関する Fenchel-Nielsen 座標

$$(l, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \cong \mathcal{T}(S)$$

を考える。

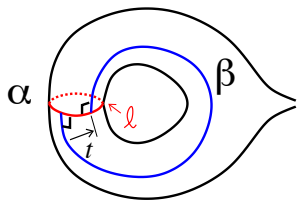


## 4. Complex Earthquake

$\alpha$  に関する Fenchel-Nielsen 座標

$$(\ell, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \cong \mathcal{T}(S)$$

を考える。



$\text{Eq}(\ell) \subset P(S) \cong \mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S)$  を次で定義。

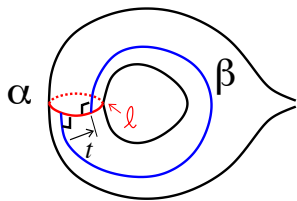
$$\text{Eq}(\ell) = \{(b\alpha, (\ell, t)) \mid b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t \in \mathbb{R}\}$$

## 4. Complex Earthquake

$\alpha$  に関する Fenchel-Nielsen 座標

$$(\ell, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \cong \mathcal{T}(S)$$

を考える。



$\text{Eq}(\ell) \subset P(S) \cong \mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S)$  を次で定義。

$$\text{Eq}(\ell) = \{(b\alpha, (\ell, t)) \mid b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Eq}(\ell) \xrightarrow{\text{hol}} X(\ell)$$

$$\{\tau = t + \sqrt{-1}b \mid b \geq 0\}$$

$$\{\tau \mid -\pi < \text{Im}(\tau) \leq \pi\}$$

$\Downarrow$

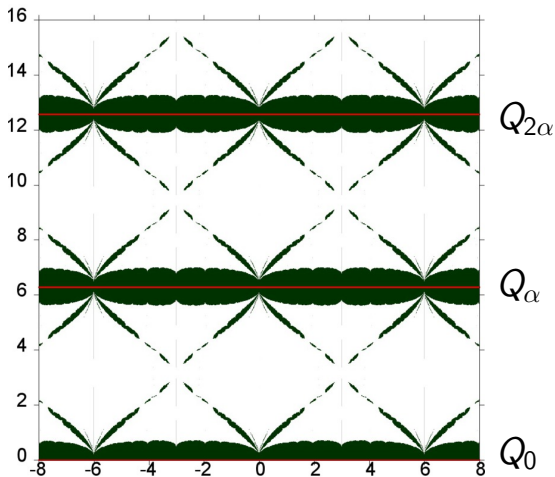
$\Downarrow$

$\tau$

$\mapsto$

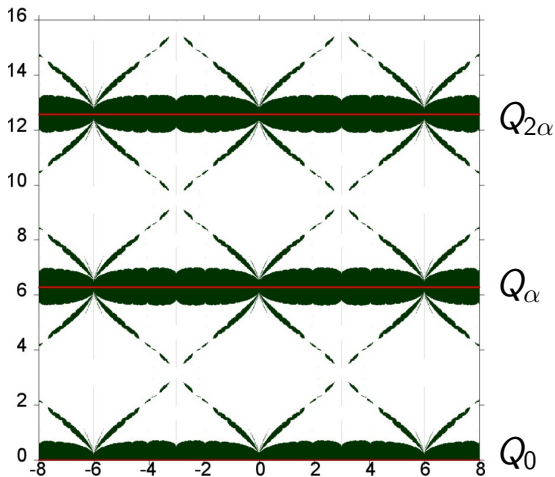
$$\tau \bmod 2\pi\sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{hol}^{-1}(QF(\ell)) &= \text{hol}^{-1}(X(\ell) \cap QF(S)) \\
 &= \text{Eq}(\ell) \cap \text{hol}^{-1}(QF(S)) \\
 &= \bigsqcup_{\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)} \text{Eq}(\ell) \cap Q_{\mu}.
 \end{aligned}$$



Eq(6.0)

$$\begin{aligned}
 \text{hol}^{-1}(QF(\ell)) &= \text{hol}^{-1}(X(\ell) \cap QF(S)) \\
 &= \text{Eq}(\ell) \cap \text{hol}^{-1}(QF(S)) \\
 &= \bigsqcup_{\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)} \text{Eq}(\ell) \cap Q_{\mu}.
 \end{aligned}$$



Eq(6.0)

観察

標準的成分の  
逆像は

$$\bigsqcup_{k=0,1,\dots} Q_{k \cdot \alpha}$$

に含まれる.

## 補題

$\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$  ( $\mu \neq 0, \alpha, 2\alpha, \dots$ ) に対し

$$\text{Eq}(\ell) \cap Q_{\mu} \neq \emptyset$$

なら  $QF(\ell)$  は標準的でない成分を持つ.

## 補題

$\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$  ( $\mu \neq 0, \alpha, 2\alpha, \dots$ ) に対し

$$\text{Eq}(\ell) \cap Q_{\mu} \neq \emptyset$$

なら  $QF(\ell)$  は標準的でない成分を持つ.

とくに  $\mu = \beta$  として,  $\ell > 0$  が大きいときに

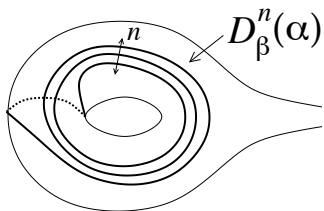
$$\text{Eq}(\ell) \cap Q_{\beta} \neq \emptyset$$

を示せば良い.

$D_\beta$  :  $\beta$  に関する Dehn twist,  $X \in \mathcal{T}(S)$

$P(S) \cong \mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S)$  の点列

$$\left( \frac{2\pi}{n} D_\beta^n(\alpha), X \right)$$



は  $(2\pi\beta, X) \in Q_\beta$  に収束する ( $n \rightarrow \infty$ ) .

よって十分大きな  $n$  に対して  $(\frac{2\pi}{n} D_\beta^n(\alpha), X) \in Q_\beta$  .

$D_\beta^{-n}$  を作用させると  $(\frac{2\pi}{n} \alpha, D_\beta^{-n}(X)) \in Q_\beta$  ( $n \gg 0$ ) .

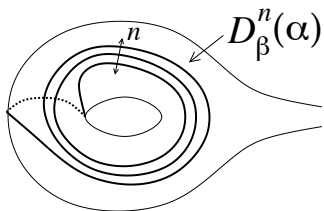
$\ell = \ell_\alpha(D_\beta^{-n}(X))$  とおくと  $(\frac{2\pi}{n} \alpha, D_\beta^{-n}(X)) \in \text{Eq}(\ell)$  .



$D_\beta$  :  $\beta$  に関する Dehn twist,  $X \in \mathcal{T}(S)$

$P(S) \cong \mathcal{ML}(S) \times \mathcal{T}(S)$  の点列

$$\left( \frac{2\pi}{n} D_\beta^n(\alpha), X \right)$$



は  $(2\pi\beta, X) \in Q_\beta$  に収束する ( $n \rightarrow \infty$ ).

よって十分大きな  $n$  に対して  $(\frac{2\pi}{n} D_\beta^n(\alpha), X) \in Q_\beta$ .

$D_\beta^{-n}$  を作用させると  $(\frac{2\pi}{n} \alpha, D_\beta^{-n}(X)) \in Q_\beta$  ( $n \gg 0$ ).

$\ell = \ell_\alpha(D_\beta^{-n}(X))$  とおくと  $(\frac{2\pi}{n} \alpha, D_\beta^{-n}(X)) \in \text{Eq}(\ell)$ .