数理解析 I 要綱 #1

2002–4–10　　河野

ガイダンス 最初は数学的イントロではなく，非数学的イントロ。

(1) 数理解析 0 について — 別紙参照。

(2) 「数理解析 I+ 基礎解析 I」でワンセット。基礎解析では講義をする事もある。

(3) 私語禁止。勿論数学的質問は随時 (私の話している途中でも) してかまわない。

(4) 出席はとらない。成績は基本的に試験で判断する。補助的に演習, レポートも用いることがある。

(5) 大学の数学についての注意。

1) 大学は講義だけ聞いて理解できるという想定をしていない。講義が演習・実験に比較して，同じ時間で単位数が多いのは，講義と同じ時間の予習・復習 (合わせて講義時間の 3 倍) をすることを前提としている。

2) 講義をしっかり聞き，分からない所はその場で質問をするように (もちろん後での質問がダメというわけではない)。

3) 数学 (数学だけではないが) を勉強する時間が少なくなる。特に数理解析は「最初は高校と同じと思っていた」という意見が後から聞かれる。

4) 内容的にも変化がある。高校では，問題を解くのが中心で，所謂「模範回答」というものが有った。しかし大学では中身 (定義・定理) を正確に (論理的に) を理解するということが中心になる。問題はその補助手段と考えた方が良い。

5) 大学の先生は高校の先生程「親切」ではない。学生を「大人」として扱う。自分から action を起こさない限りめんどうは見てくれない。

6) 次は『数学 7 つの迷信』(小針宏) より—興味のある人は図書館へ (多分あると思う)。

   1. 数学はむつかしく，数学のできる人は頭がよい。
   2. 数学は計算技術である。
   3. 記号は文字でなく，数式は言葉でない。
   4. 公理は絶対自明の真理である。
   5. 数学は答えの決まった問題を解くことである。
   6. 数学は頭の体操として人間に役に立つ。
   7. 数学と政治は無関係。

なおこれから講義で配るプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/ に pdf 形式で置く予定である。

テキストからさらに突っ込んだ事を知りたい人には参考書として次をあげておく。

高木貞治『解析概論』(岩波書店)
小平邦彦『解析入門』(岩波書店)

数学的イントロ

微積分は自然科学などを通して，大きな役割を果たしてきたし，現在も果している（宇宙船・天気予報 etc)。この講義では，前後期にわたってその微積分学を学習して行く。

微積分は高校でも学んだはずだが (数学 III を学んでいないものは多項式の微積分まで)，どこが違うのだろう。高校との違い (これについては，強調するかしないかの 2 つのやりかたがある) は 1 つは，量的に，範囲がひろがるという事がある。逆三角関数，Taylor の定理，多変数関数等あるが，特に多変数関数を扱うというのが大きな違いだろう。2 つ目は質的側面（理論構成の厳密さ $\cdots$ 極限概念と実数概念)。後者については少し説明が必要だと思われる。微積分の歴史にもふれながら，それを説明して全体の講義のイントロにしたい。

微積分学は 17 世紀の後半にニュートン (1642–1727) とライプニッツ (1646–1716) によって独立に始められた。先主権争いなどもあったが今では独立に (お互に相手の仕事を知らないで) やったとされている。源流は 2 つあり，1 つはギリシア以来の『求積法』(面積・体積などを求める方法)，もう 1 つは『接線法』と呼ばれたもの。いずれも，所謂「無限概念」に関係するもので，その当時から，色々な批判があった。それは，その当時の人が数学 (数学だけでなく諸科学・諸文化) の理想と考えた古代ギリシアの厳密な取り扱いに比べて，曖昧 (或る人にとっては「いいかげん」) に感じられたのであろう。ここでは極限概念に対するバークレイの批判を紹介する。

例　$y = f(x) = x^2$ の導関数を求めてみよう。(物理の場合の問題だと，x 秒後の物体の位置が x^2 で表わされる時，x 秒後の速度は。)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to \infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to \infty} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to \infty} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to \infty} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

これに対するバークレイの批判は以下の様である。数 (実数) は 0 であるかないかのいずれかである。だから h も 0 であるかないかのいずれかである。

最初に $h \neq 0$ としよう。この時最後の等式は成立しない。次に $h = 0$ としよう。この時は途中で 0 で割算をしている。

いずれにせよ矛盾を含む議論をしている。

これに対しニュートンを初めとして，確かに色々な説明をしている。しかし，本質的には答えることが出来なかった。それは極限概念が直観に依存する形で展開され，数学的に厳密とは言い難かった事に原因を求める事ができるかもしれない。しかし，微積分学は，ニュートンに依る惑星の運動法則の解明をはじめとして，多くの事に解答を与えた。微積分学は基礎は曖昧であったが捨て去るには強力で魅力的だった。ダランベールの「前進しよう。信念は後から涌いてくる。」という言葉がその様子を表わしている。

17,18 世紀を通じて微積分学そしてニュートン力学は大きな成功をおさめる。例えば，惑星の存在の予想など。「微分方程式を用いて運動の将来を厳密に予測できる。」という立場は例えば，ラプラスによる『ラプラスの魔』の考えを生み出したり，哲学に持込まれ，機械論的決定論を生み出す。

19 世紀の 20–30 年代にコーシー (1789–1857) により『解析教程』のなかで，極限の数学的にも厳密な定義が提出される。現在 ε-δ 論法と呼ばれている。大学の授業の中でも微積分学が取上げられてくるのと同じ時期ということは注意する必要がある。「その時代」の一つの解決，理論的定式化という事が出来る。

微積分学の理論構築のためには，もう 1 つ問題がのこっていた。それは「実数とは何か」という問題である。そんなのは分っているというかもしれないが，高校まででは「これこれのものが実数である」というきちんとした定義はやっていない (無限小数も理論的にはキッチリはやってない)。例として，次の問題を考えてみる。

【問題】$\sqrt{2}$ は存在するか。すなわち $x^2 = 2,\ x > 0$ となる実数は存在するか。　最初に平方根を学んだ時,「$x^2 = 2$,$x > 0$ となる数を $\sqrt{2}$ と呼ぶ。」としたはず。しかし，そのような数が，実数のなかに存在しなければ，定義は意味がない。例えば，$x^2 = -1$ となる実数は存在しない。だから「$x^2 = -1$ となる実数を i と呼ぶ。」と定義しても意味はない。「定義」したことで存在するつもりになってはいけない。定義する前に存在を確かめなくてはならない。‘1 辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さ’ とする考えもあるかもしれないが ‘直線上の点と実数に 1 対 1 の対応がつくのか’ という疑問は残る。

「微積分学の基本定理」とよばれている定理が在るが (後期にやる)，それを示すのには「平均値の定理」を必要とする。これを示すには「ロルの定理」，そのためには「最大値定理」と遡って行く事ができるが，最後 (最初のというべきか) の最大値定理をうまく証明できない。明確な証明のためには「実数とは何か」の解明が必要という事が自覚されてくる。

そうした中，この問題（実数論）は 19 世紀後半に何人かの人によって独立に展開された。カントール (1845–1918)，デデキント (1831–1916)，ワイエルシュトラス (1815–1897) などがその人達である。

微積分は基礎の厳密さが確定する前に理論自身が発展するという形をとった。その原因として，「無限概念」に関係した数学理論だという点があげられる。