数理解析 I 要綱 #4　　　2002–5–8　　　河野

1.4 導関数

関数 f の導関数 f' は (存在する場合) 次の式で定義されるものであった。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$y = f(x)$ の導関数の表し方は次のように色々ある。前 2 つはニュートン流，後ろ 3 つはライプニッツ流である。

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{df}{dx}(x)$$

幾何的にはその点における接線の傾きを表す。微分とは線型近似 (1 次近似) であるという見方は大切である。

f は微分可能とする。今 x を任意に固定して h を変数と考える。$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \varepsilon$ とおくと $h \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ となる。つまり

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varepsilon h$$

において h が非常に小さいとき，εh は (**非常に**)^2 小さいと考えられる。この項を無視した残りの項が $f(x)$ を近似しているという見方が線型近似である。

逆に関数 f が 1 次式で「近似」できるとき，その点で微分可能である。即ち関数 f が x の近傍において 1 次式 $ah + b$ で近似できるとき，$b = f(x)$, $a = f'(x)$ となる。

定理 1.15 関数 f, g は微分可能とする。a は定数とする。
(1) $(f+g)' = f' + g'$
(2) $(af)' = af'$
(3) $(fg)' = f'g + fg'$
(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

定理 1.16 [**合成関数の微分法**]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

定理 1.17 [**逆関数の微分法**] ある区間 I で定義された関数 f が微分可能かつ狭義単調であるとき，逆関数は微分可能で導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

演習問題 1.2 テキストを参考にして，定理 1.15, 1.16, 1.17 を証明せよ。

1.5　いろいろな関数とその導関数

ここで今まで出てきた関数とその導関数を整理しておこう。最後の逆 3 角関数は初めて出てくる。

1) **整関数**　多項式 $f(x) = a_n x^x + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ を考える。実数上の関数で x に対し $f(x)$ を対応させる関数を f と書く (関数 $y = f(x)$ と書く場合もある)。これを整関数または多項式関数という。整関数は連続関数である。$(x^n)' = nx^{n-1}$ が分かるので定理 1.15 より導関数が求められる。

2) **有理関数**　有理式 $Q(x)$[2]で定義される関数を有利関数という。ただし，これには 2 つほど注意が必要であろう。1 つ目は定義域の問題で，この関数は分母 $g(x)$ が 0 でないところで定義される連続関数である。2 つ目は式と関数の区別である。2 つの有理式が式として等しくても定義する関数が異なる事がある。例えば $Q(x) = x$ と $P(x) = \dfrac{x^2}{x}$ は式としては同じだが定義する関数は異なる。多項式の導関数は (1) より分かるので，定理 1.15 を用いると有理関数の導関数を求める事ができる。

3) **無理関数**　無理関数は次の様に定義される。一般の場合でなく n 乗根について述べる。つまり，$f(x) = x^n$ を定義域を $\boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqq 0\}$ として考えるとこれは単調増加関数である。逆関数が存在するが，これを無理関数と定義する。定義域は様々あるが，定義域で連続である。導関数は定理 1.17 を用いると求められる。例えば $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ は $x = y^n\ (y \geqq 0)$ の逆関数である。$\dfrac{dx}{dy} = ny^{n-1}$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

無理関数は 1),2) と違って微分可能でない点が存在する。即ち定義域の端点で一般に微分可能にならない。

4) **指数関数**　指数関数がどう定義されたかを振返ってみよう。a を正の実数として $y = a^x$ を定義したい。いきなりは難しいので自然数から始めて定義域を拡張していく。

A) 定義域が自然数の時：　この時は $x = n$ とした時 $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n\,\text{個}}$ で定義する。次の指数法則が成立する。

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

以下拡張はこの指数法則が成立するようになされる。

B) 定義域が整数の時：　まず $x = 0$ の時指数法則を成立させるには $a^x = a^0 = 1$ が必要。よってそう定義する。また $x = -n$ のとき指数法則が成立すれば $a^x a^n = a^0 = 1$ より $a^x = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定義する。

[2] $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ と表される式，ただし，$f(x), g(x)$ は多項式。

C) 定義域が有理数の時：　まず $x = \dfrac{1}{n}$ を考えると，指数法則が成立すれば $(a^x)^n = a^{xn} = a^1 = a$ より $a^x = \sqrt[n]{a}$ とする。また一般の $x = \dfrac{m}{n}$ に対しては $a^x = (\sqrt[n]{a})^m$ と定義する。

D) 実数が定義域の場合：　今までとは少し違う。指数法則が成立するだけの条件なら拡張の仕方は一通りとは限らない。そこで指数関数が連続になる事を要請する。x を実数とする時それに収束する有理数からなる数列 $\{a_n\}$ が存在する。a^{a_n} は定義されているので $\{a^{a_n}\}$ という数列を考える。この数列は収束する事が証明されるのでこの極限値で a^x を定義する，つまり $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{a_n}$ とする。この定義に基づいてきちんと議論をすれば '指数法則'，'連続性'，'$a > 1$ の時単調増加'，'$0 < a < 1$ の時単調減少' 等を示す事ができる。指数関数は複素数まで拡張される (オイラーの公式) がここでは取上げない。

指数関数の導関数を計算するためには e という数を考える必要がある。導関数を求めながらこの事を見よう。$y = f(x) = a^x$ とする。

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

となるので，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ を計算する必要がある。これは指数関数 a^x の $x = 0$ における傾きである。a の値を変化させると傾きは変化する。この傾きが 1 になるような a が存在するので[3]，これを e とおく。このとき $(e^x)' = e^x$ が得られる。一般の a に対しては，$a = e^k$ とおくと，

$$(a^x)' = (e^{kx})' = ke^{kx} = a^x \log a$$

を得る (対数関数の密輸入をしてしまった)。

5) **対数関数**　指数関数の所で述べたが，$a \neq 1, a > 0$ の時指数関数 $y = a^x$ が定義されて単調な連続関数になる。よって定理 1.14 より逆関数が存在する。これを $\log_a x$ と書き，(a を底とする) 対数関数という。特に底が a のとき自然対数といい底を省略する場合も多い。$y = \log_a x$ のとき $x = a^y$ となる。$\dfrac{dx}{dy} = a^y \log a$ なので，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$ となる。自然対数の場合は $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ となる。

6)3 **角関数**　原点 $O(0,0)$ 中心の半径 1 の円周上に点 $P(x,y)$ をとる。$(1,0)$ を Q とするとき，角 QOP を θ とする。この時 $\cos\theta = x, \sin\theta = y$ と定義する。$\cos\theta \neq 0$ の時 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と定義する。これらは連続関数になり，加法定理等諸々の事が成立する。3 角関数の導関数は次の式から導かれる (テキスト p13 例 8 参照)。

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$\sin x$ に関する加法定理を用いると

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

となる。$\dfrac{\cos h - 1}{h} = -\dfrac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$ に注意すると，$(\sin x)' = \cos x$ を得る。

[3] これは厳密ではない。厳密には，例えば，$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ の収束を示し，この極限値を e とおき，この性質を示す。

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $-\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ に注意すると，$(\cos x)' = -\sin x$ が得られる。$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ であるから，$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ が得られる。

7) **逆三角関数**　3 角関数は 1 対 1 ではないので普通には逆関数は存在しない。しかし，色々な事情があって (積分等で必要になる) 逆関数を考えたい。そこで次の様に定義域を制限した上で逆関数を考える。まずは正弦関数。$y = \sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ では単調増加である。そこで定義域をここに制限すると連続で単調増加であるのでこの制限された関数の逆関数を考える事ができる。これを $\arcsin x$ または $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ と表し，逆正弦関数という。$y = \arcsin x$ のとき，$x = \sin y$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ なので，$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ より

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

を得る。

$\cos x$ は $[0, \pi]$ に制限して同様に $\arccos x$ または $\mathrm{Cos}^{-1}\, x$ と表し，逆余弦関数という。導関数は $arcsinx$ のときと同じ様に計算すると

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

が得られる。

$\tan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に制限して同様に $\arctan x$ または $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$ と表し，逆正接関数という。$y = \arctan x$ のとき，$x = tany$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ なので $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ より

$$\frac{dy}{dx} = (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

が得られる。