数理解析 I 要綱 #5

2002–5–15　　河野

演習問題 1.3　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

(1) $y=x^3$　　(2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y=\cos x$　　(4) $y=\log x$

演習問題 1.4　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y=xe^x$　　(2) $y=\sin^{100}2x$

(3) $y=x^3\log(2x^3+x)$　　(4) $y=\arcsin(x^2+1)$

(5) $y=x^x$

1.6　高次導関数と Taylor の定理

導関数が微分可能なとき更にその導関数を考える事が出来る。それを高次導関数と呼ぶ。導関数の導関数を 2 次導関数または 2 階の導関数といい

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f''(x)$$

表す。n 次 (n 階の) 導関数は

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \qquad f^{(n)}(x)$$

と表す。以下この節では関数は何回でも微分可能である事を仮定する。

次の定理は 'Taylor の定理' と呼ばれ色々な応用がある。

定理 1.18

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。

定理 1.18 は次の形にしておけば $h<0$ のときも成立する。

系 1.19 任意の h に対しある $\theta(0<\theta<1)$ が存在して

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

と表せる。同じことだか任意の x に対し a と x の間に c が存在して

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor の定理の最初の応用として極値に関する次の定理を得る。

定理 1.20 $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0,\ f^{(n)}(c) \neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = c$ で極値をとる。

1) $f^{(n)}(c) > 0$ のとき $f(x)$ は極小である。

2) $f^{(n)}(c) < 0$ のとき $f(x)$ は極大である。

(2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x = c$ で極値をとらない。

1) $f^{(n)}(c) > 0$ のとき $f(x)$ は増加の状態にある。

2) $f^{(n)}(c) < 0$ のとき $f(x)$ は減少の状態にある。

Taylor の定理の 2 番目の応用として近似がある。この定理は線型近似より一般的にはよりよい近似を与える。$n = 2$ の場合を考えてみよう。$n = 2$ の場合系 1.19 の形で述べると,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

$f''(x)$ の有界性を仮定しているので，$x - a$ が非常に小さいとき，最後の項は (**非常に**)^2 小さい。よってこの項を無視して考える。これは線型近似を与える。

次に $n = 3$ の場合を考える。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

$x - a$ が非常に小さいとき最後の項は (**非常に**)^3 小さい。この項を無視して $f(x)$ を

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

で近似する。これは線型近似より一般的にはよりよい近似になっている。

テーラー展開において剰余項 $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるとき，関数は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表すことができる。これをテーラー級数と言い，このとき $f(x)$ は $x = a$ でテーラー (級数) 展開可能であるという。

$f(x) = e^x$ のとき，$f'(x) = e^x$ より，任意の n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。今 $f(x) = e^x$ が $x = 0$ でテーラー展開可能である事は仮定しておく。$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ なのでテーラー級数は

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。

$f(x) = \sin x$ のときは，$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f''''(x) = \sin x \ldots$ より，テーラー級数は

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

となる。

$\cos x$ のテーラー級数は

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

となる。

e^x の級数展開の x に形式的に ix (i は虚数単位即ち $\sqrt{-1}$) を代入する事により，オイラーは次のオイラーの公式を導いた。

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

オイラーの公式と指数法則を知っていれば 3 角関数の加法定理は自然に出て来る。オイラーの公式より $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，$e^{iy}=\cos y+i\sin y$，$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$ を得る。$e^{i(x+y)}=e^{ix}e^{iy}$ なので，

$$\cos(x+y)+i\sin(x+y)=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$$

この実部同士，虚部同士を比較すると加法定理が得られる。

演習問題 1.5　次の関数の $x=0$ におけるテーラー級数を求めよ。

(1) $f(x)=\log(1+x)$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}$　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

演習問題 1.6　次の関数を $x=a$ でテーラー (級数) 展開せよ。

(1) $f(x)=x^5\quad(a=1)$　(2) $f(x)=e^x\quad(a=1)$

(3) $f(x)=\sin x\quad(a=\pi)$　(4) $f(x)=\log x\quad(a=1)$