数理解析 I 要綱 #6　　2002–5–22　　河野

テーラー展開を用いての近似計算を幾つか行う。最初は e の近似計算。

演習問題 1.7　$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ とおくと，いずれも e (自然対数の底) に収束する。しかし，収束の速度は大きく違う。

$n = 8$ のときの a_n, b_n の値を計算し，どちらの近似がより正確かを比較せよ。

次に π の近似値を考えよう。そのために $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$ のテーラー展開を考える。

$$(1+x)(1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n) = 1+(-1)^n x^{n+1}$$

より

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

を得る。この x に x^2 を代入すると，

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

となる。この式を 0 から x まで積分すると，

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x 1dx - \int_0^x x^2dx + \cdots + \int_0^x (-1)^n x^{2n}dx + \int_0^x (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

を得る。$(\mathrm{Tan}^{-1}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ に注意し，$R = \displaystyle\int_0^x (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$ とおくと，テーラー展開

$$\mathrm{Tan}^{-1}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R \tag{1}$$

が得られる。

$\left|\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}\right| \leqq |x|^{2n+2}$ に注意すると，

$$|R| = \left|\int_0^x (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right| \leqq \left|\int_0^x x^{2n+2}dx\right| = \frac{1}{2n+3}|x|^{2n+3}$$

なので，$-1 < x < 1$ のとき $R \to 0 (n \to \infty)$ となり，テーラー級数展開

$$\mathrm{Tan}^{-1}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

が分る。

演習問題 1.8　上記式 (1) を用いて ($x = 1$, $n = 5$ として適用) π の近似値を求めよ。

この近似はあまり良くはない。そこで次の様な近似計算を考える。

演習問題 1.9　α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ となる角とする。

(1) $\tan x$ に関する加法定理（または倍角の公式）を用いて $\tan 2\alpha = \dfrac{5}{12}$ を示せ。

(2) 同様に $\tan 4\alpha = \dfrac{120}{119}$ を示せ。

(3) $\tan\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{239}$ を示せ。最後の式を用いると

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239} \tag{2}$$

という式を得る。

(4) この式 (2) に対し (1) 式を $n = 5$ として適応して π の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

2 多変数関数の微分 (偏微分)

この章では多変数関数の微分を扱う。1 つのファクターで決定される事象を形式化したのが 1 変数関数とするならば，多変数関数はいくつかの (複数個の) ファクターによって決定される事象を形式化したものといえる。多変数関数は定義域自身も複雑な場合があるのでその話から始める。

2.1 点集合

講義ではあとで述べるような限定をして取り扱うので，厳密には取り扱わない。ただしプリントにはきちんと書いておこう。

距離 平面内の点集合をとらえるとき，基礎になるのが距離の概念である。$P = (x, y)$,$Q = (x', y') \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ とおくと，

(1) 正値性：$d(P, Q) \geqq 0$。等号成立は $P = Q$ のときのみ

(2) 対称性：$d(P, Q) = d(Q, P)$

(3) 3 角不等式：$d(P, R) \leqq d(P, Q) + d(Q, R)$

が成立する。空間の時の同様な事が成立する。逆に，性質 (1)–(3) が成り立つようなものを距離と考える。

定義 2.1 以下，もっぱら 2 次元 (平面) に関して議論するが，同様の事は n 次元空間[4]でも同様の議論はできる。

$U_\varepsilon(P) = \left\{ Q \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, d(Q, P) < \varepsilon \right\}$ を P の ε–近傍という。$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合を 1 つ固定して A とする。P の任意の ε–近傍が A と共通点を持つとき，P を A の内点という。A の内点全体の集合を $\overset{\circ}{A}$ と書く。

P の ε–近傍で A と共通部分がないものが存在するとき，P を A の外点という。A の外点でも内点でもない点を境界点といい，境界点全体の集合を ∂A と書く。

A に対し $\partial A \subset A$ となるとき，A を閉集合という。$\partial A \cap A = \emptyset$ となるとき A を開集合という。

A が次の性質を持つとき**連結** (connected) であるという ： 任意の 2 点 $P, Q \in A$ に対し区間 $I = [a, b]$ から A への連続写像で $f(a) = P$, $f(b) = Q$ となるものが存在する。

[4] $\boldsymbol{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R} (i = 1, \ldots, n) \}$ を n 次元空間と呼び，その元 $P = (x_1, \ldots, x_n)$ を点と呼ぶ。2 点 $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $Q = (y_1, \ldots, y_n)$ 間の距離を $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ で定義する。

連結な開集合を領域という。D が領域の時 $D \cup \partial D$ を $\bar{D}$ で表わしこれを閉領域という。（閉）領域がある円板 $\left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq M \right\}$ に含まれる時有界であるという。

注意 2.2 (大事な限定) 以下，我々はほとんどの場合，集合は『有限個のなめらかな曲線でかこまれた図形』に限る事にする。

E をそのようなものとする。『有限個の滑らかな曲線』が ∂E となる。

2.2　多変数関数

多変数関数は一般に独立変数が 2 個以上である関数をいうが，我々はもっぱら 2 変数関数に関して議論する (一部 3 変数関数も扱う)。一般の n 変数関数は以下の 2 の部分を n に変えるとほぼ同様にできる。一般に$\boldsymbol{R}^2$の部分集合 D で定義された関数を 2 変数関数と呼び，

$$f : D \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

と表わす。多変数関数は 1 変数関数と異なりグラフがあまり役にたたない。独立変数が 2 個の時は辛うじてグラフが書けるが 3 次元的なのでわかりにくい。等高線で表わす方法もあるが全容はとらえにくいし，変数の個数が多くなると書けなくなる。

定義 2.3 (極限) D で定義された関数

$$f : D \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

に対し，$P = (x, y)$ を限りなく $P_0 = (a, b)$ に近づけた時，$f(P) = f(x, y)$ が限りなくある値 A に近づく時（つまり，$d(P, P_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ を限りなく 0 に近づける時，$|f(P) - A|$ が限りなく 0 に近づく時)，

$$\lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) = A, \quad , \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$$

$$f(P) \longrightarrow A \quad (P \longrightarrow P_0) \qquad f(x, y) \longrightarrow A \quad ((x, y) \longrightarrow (a, b))$$

などと書き，P を P_0 に近づけた時の $f(P)$ の極限と言う。

例 2.4

(1) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ は

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$$

である。

(2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ は $y = mx$ 上を近づけると
$f(x, mx) = \dfrac{m}{1 + m^2}$ なので，収束しない。

注意 2.5 多変数の極限と累次極限を混同しないように。前の例の 2 番目は累次極限は存在する。ここで類似極限とは

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

の様な形の極限である。上の例でいうと最初に y を b に近づけ，次に x を a に近づけるものである。それに対し多変数の極限は x と y を同じに近づけるものである。多変数の極限が存在すれば類似極限は存在するが，逆は正しくない。

定義 2.6 D で定義された関数 $f(P) = f(x, y)$ が点 $P_0 = (a, b)$ で連続とは

$$\lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) = f(P_0), \qquad \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(a, b)$$

が成立する事を言う。定義域 D の各点で連続の時 $f(P)$ は D で連続であるという。この時 f を単に連続関数という。

連続関数の和，差，積，商等が連続関数になるのは 1 変数関数と同じ。合成関数の連続性も同じ。最大値定理に対応するのが次の命題。

定理 2.7 (最大値定理) 有界閉集合で定義された連続関数は最大値をとる。

2.3 偏微分

1 変数関数の微分の場合,「導関数が存在する」という事と「接線が存在する」という事は同じ概念であった。しかし 2 変数以上で微分を考えると 2 つは異なる概念となる。定義 2.8 は「導関数が存在する」事に対応する。偏導関数とは 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，例えば x のみを変数と見て微分したものである。

定義 2.8 (偏導関数) 関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ において x に関して（y に関して）偏微分可能とは

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\left(\lim_{k \longrightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \right)$$

が収束する事を言う。この時この極限値を

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad f_x \quad z_x$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad f_y \quad z_y \right)$$

と書く。x に関しても y に関しても偏微分可能の時，単に偏微分可能と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを x に関する（y に関する）偏導関数と言う。

偏微分可能という条件は弱い条件である。偏微分可能であるが連続でない例が存在する。次の関数は原点で偏微分可能であるが連続ではない。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

演習問題 2.1　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

1 変数の「接線が存在する」という概念は 2 変数関数では「接平面が存在する」となる。定義 2.9 がそれに対応する。

定義 2.9 (全微分可能) $f(x,y)$ は点 (a,b) のまわりで定義されていて，(a,b) で偏微分可能とする。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく。$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とは

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

となる時をいう。

次は定義からすぐ出てくる。

命題 2.10 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であれば，偏微分可能である。

全微分可能を直接示すのは面倒な場合もあるが，次の定理が成立するので，我々の扱う多くの関数は全微分可能である事が分かる。

定理 2.11 f_x, f_y が存在して，そのいずれかが連続なら f は全微分可能。

演習問題 2.2　演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

2.4　合成関数の導関数

合成関数の導関数は次の様になる。

定理 2.12 $z = f(x,y), x = x(t), y = y(t)$ の時，z を t で微分した導関数は次で与えられる。

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

次の形の様に行列で考えた方が分かりやすいかもしれない。

定義 2.13 2 変数関数の組 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数（の組）の**ヤコビ行列**といい，この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \det\left(\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\right)$$

で表わし，**ヤコビアン** (**ヤコビ行列式**) という。

定理 2.14 2 つの関数の組 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(s,t)}$$

が成立する。

特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.3 次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = f(x,y) = x + y^2, x + y = s, xy = t$
(2) $z = f(x,y) = x + y, x^2 + y^2 = s, x^2y^2 = t$