

2.5 3 変数関数の微分

今まで 2 変数関数の微分について学んだ。ここでは 3 変数関数について見る。2 変数関数の場合とほとんど平行に議論が進む事が確認出来る。

定義 2.15 関数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ が $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ で x_1 に関して偏微分可能とは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h}$$

が収束する事を言う。 x_2, x_3 にかんしても同様に定義できる。

x_1, x_2 及び x_3 に関して偏微分可能の時、単に偏微分可能と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを x_1 に関する (または x_2, x_3 に関する) 偏導関数と言う。 x_1 に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad f_{x_1} \quad z_{x_1}$$

等書かれる。

3 変数関数の場合全微分可能性は幾何的には「接空間の存在」を意味する。

定義 2.16 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ は点 (a_1, a_2, a_3) のまわりで定義されていて、 (a_1, a_2, a_3) で微分可能とする。

$\varepsilon(h_1, h_2, h_3) =$

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - f(a_1, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3)h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3)h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

とおく。 $f(x_1, x_2, x_3)$ が (a_1, a_2, a_3) で全微分可能とは

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon(h_1, h_2, h_3) = 0$$

となる時をいう。

合成関数に関しても 2 変数と同様の結果が成立する。

定理 2.17 $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

定義 2.18 3変数関数3個の組 $x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3)$, $x_3 = x_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{pmatrix}$$

をこの関数(の組)のヤコビ行列という。この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \det \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} \right)$$

で表し、ヤコビアンという。

定理 2.19 2つの関数の組 $x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3)$, $x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$ と $u_1 = u_1(t_1, t_2, t_3)$, $u_2 = u_2(t_1, t_2, t_3)$, $u_3 = u_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}$$

が成立する。特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.4 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする (2次元の極座標表示)。関数 $z = f(x, y)$ に対し次を示せ。

- (1) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ。
- (2) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$
- (3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

演習問題 2.5 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とする (3次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

- (1) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。
- (2) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$
- (3) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$