数理解析 I 要綱 #8

2002–6–19 河野

演習問題 2.6

(1) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\sin\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$

2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v}$, $x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u$, $y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

関数 $z = f(x, y)$ の導関数 f_x, f_y が偏微分可能のとき更に導関数を考える事ができる。f_x の x に関する導関数 $(f_x)_x$, y に関する導関数 $(f_x)_y$ を f_{xx}, f_{xy} と書く。また f_y の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数と呼ぶ。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.20 (シュワルツの定理) 点 (a, b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a, b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成立する。

系 $f(x, y)$ が C^2 級 (2 階の偏導関数が存在して連続) ならば $f_{xy} = f_{yx}$ である。

関数 $f(x, y)$ が C^n 級 (n 階までの導関数が存在して連続) であれば n 階までの導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと，定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.21 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義する。このとき $Df = h\dfrac{\partial}{\partial x}f + k\dfrac{\partial}{\partial y}f$ と見る。また $D^2 = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と考える。一般に

$$D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$$

と見る。

定理 2.22 (テーラーの定理)

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x,y) + Df(x,y) + \\ &\cdots + \frac{1}{r!}D^r f(x,y) + \\ &\cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(x,y) + \frac{1}{n!}D^n f(x+\theta h, +y+\theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$z = f(x,y) = x^2 e^y$ に対し $(x,y) = (1,1)$ でテーラー定理を用いて展開して見よう。ここでは n 次以上は無視した近似を考える。$X = x+h, Y = y+k$ とする。最初に $n=2$ の場合を考える。$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$ なので $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e$ である。よって

$$f(X,Y) \cong e + 2e(X-1) + e(Y-1)$$

である。$n=3$ の場合は

$$f(X,Y) \cong e + 2e(X-1) + e(Y-1) + e(X-1)^2 + 2e(X-1)(Y-1) + \frac{1}{2}e(Y-1)^2$$

2.7 極値

ある点 (a,b) の周りで $f(a,b)$ の値が他の $f(x,y)$ より大きいとき**極大値**という。逆に他の値より小さいとき**極小値**という。正確に言うと，ある正数 δ が存在して，$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta$ ならば $f(x,y) < f(a,b)$ が成立しているとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大といい，$f(a,b)$ を極大値という。$f(x,y) \leqq f(a,b)$ が成立するとき広義の極大といい，$f(a,b)$ を広義の極大値という。極小も同様に定義できる。極大値・極小値合わせて極値という。

関数 $z = f(x,y)$ が $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たすとき，点 (a,b) を**臨界点**と呼ぶ。1 変数関数と同様に $z = f(x,y)$ が点 (a,b) で (広義の) 極値をとれば，(a,b) が臨界点である事が分かる。この逆の「臨界点は極値」は一般に正しくないが次が成立する。

定理 2.23 (a,b) を関数 $z = f(x,y)$ の臨界点とする。$H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ とおくと次が成立する。

(1) $H(a,b) > 0$ のとき $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとる。

 1) $f_{xx}(a,b) > 0$ のとき $f(a,b)$ は極少値である。

 2) $f_{xx}(a,b) < 0$ のとき $f(a,b)$ は極大値である。

(2) $H(a,b) < 0$ のとき極値でない。

(3) $H(a,b) = 0$ のときはこれだけでは分らない。極値になる場合もならない場合もある。

例 2.24 $z = f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2y^2$ の極値を調べよう。最初に極値候補となる臨界点を求めよう。$z_x = 4x^3 + 4xy^2 = 0$, $z_y = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 0$ の共通解が求めるものになる。この連立方程式を実数の範囲で解くと $(x,y) = (0,0), (0,1), (0,-1)$ を得る。

$z_{xx} = 12x^2 + 4y^2$, $z_{xy} = 8xy$, $z_{yy} = 12y^2 + 4x^2 - 4$ なので $H(0,\pm 1) = 32 > 0$, $H(0,0) = 0$ となる。定理 2.23 より，z は $(0,\pm 1)$ で極小である。$H(0,0) = 0$ なので $(0,0)$ の様子は定理 2.23 からは分からない。個別に調べなければならない。この場合は極値になりそうもないと当りをつけてそれを示す。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0) = x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y) = y^4 - 2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極値でない事が分かる。