数理解析 I 要綱 #10　　　2002–7–3　　　河野

3　1変数関数の不定積分

これから積分を扱っていくが，最初に定積分と不定積分の違いに関して述べておく。

高校では不定積分 (原始関数) を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで，厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが，定積分は求積法と関係して定義されるものであり，直接は不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は定積分の定義のときにもう一度ふれるが，この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1　定義と諸性質

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (*primitive function*) または**不定積分** (*indefinite integral*) といい,

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と表す。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではない。しかし次の命題から定数分の差しかない事が分かる。

命題 3.1 2 つの関数 $F(x)$, $G(x)$ が $F'(x) = G'(x)$ を満たせばある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

例えば $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ なので

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

となる。この C を積分定数と呼ぶが通常省略される。

命題 3.2 [積分の線型性]

(1) $\displaystyle\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

命題 3.3 [いくつかの関数の不定積分]

(1) $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \qquad (a \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$

(5) $\displaystyle\int e^x dx = e^x$

(6) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$

3.2 置換積分法と部分積分法

積分の計算は微分の計算に比べ一般に難しい。計算の方法として次の 2 つがある。

定理 3.4 [部分積分法]

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

証明　定義より

$$\int \frac{d}{dx}f(x)dx = f(x)$$

が成立している。$\dfrac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \dfrac{d}{dx}f(x)g(x) + f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)$ の両辺を積分すると

$$f(x)f(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

を得る。これを移項すると定理が得られる。 ∎

定理は移項すると

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

の形になる。実際に適応するときは，どちらを微分されたものと考えるかで 2 通り方法がある。次の例は最初は後者，次は前者の形の適応である。

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int x\log x dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2$$

部分積分を 2 回実行する必要のある次の様な形の積分もある。

$$\int x^2e^x dx = \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

また $1=(x)'$ と考える言わば退化した形で用いられる積分もある。

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x^2 \log x - x$$

定理 3.5 [置換積分法] $x=\varphi(t)$ とすると，

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

証明 $\int f(x)dx = F(x)$ のとき $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である。合成関数の微分法により $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d\varphi(t)}{dt}f(x)$ なので

$$\int f(\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}dt = F(\varphi(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

を得る。■

置換積分は色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは次節で扱うがここでは幾つかの例を見ておこう。

最初に変数が 1 次式になっている形の積分を考える。$I = \int \cos(2x+3)dx$ を考える。$t = 2x+3$ と置くと，$\frac{dt}{dx} = 2$ なので，$dx = \frac{1}{2}dt$ である。よって

$$I = \int \cos t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin(2x+3)$$

次に $I = \int u' f(u)dx$ という形の積分を見よう。最初に対数型 $\int \frac{u'}{u}dx$

$\int \frac{x}{1+x^2}dx$ を考える。$t = 1+x^2$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 2x$ なので，$dx = \frac{1}{2x}dt$，よって

$$I = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \log t = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

対数型 2 番目：$\int \tan x dx$ を考える。$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので $u = \cos x$ とおくと，$\frac{du}{dx} = -\sin x$ より $dx = -\frac{1}{\sin x}du$ である。よって

$$I = -\int \frac{\sin x}{u}\frac{1}{\sin x}du = -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| = -\log|\cos x|$$

非対数型：$I = \int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ のとき。天下りではあるが，$x = a\tan t$ とおくと，$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{(\cos t)^2}$ なので $dx = \frac{a}{(\cos t)^2}dt$ となる。$x^2+a^2 = a^2(\tan t)^2+a^2 = a^2\frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^2}+a^2 = a^2\frac{(\sin t)^2+(\cos t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{a^2}{(\cos t)^2}$ なので

$$I = \int \frac{\cos^2 t}{a^2}\frac{a}{(\cos t)^2}dt = \int \frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}t = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

演習問題 3.1　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2x+5)^6$　(2) e^{-2x}　(3) $\sin\dfrac{x}{2}$　(4) $\dfrac{1}{x(x-1)}$

(5) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$　(6) $\arctan x$　(7) $\arcsin x$　(8) $(\log x)^2$

(9) $x\sin x$　(10) $x^2\cos x$

重要な注意： 不定積分において計算は一般に大変であるが，**検算**は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。**必ず検算をする事!!**